

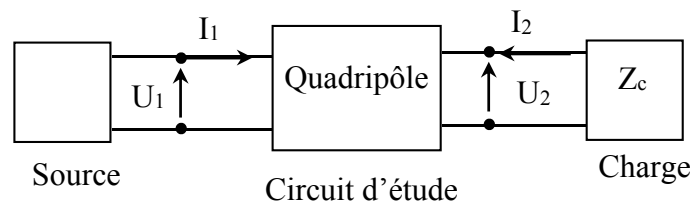
Chapitre 4

Quadripôles passifs - Filtres

Nous étudions dans ce chapitre la réponse d'un quadripôle à une tension sinusoïdale en fonction de la fréquence du signal.

1. Quadripôle

- Un quadripôle est un dispositif électrique délimité par quatre bornes de liaison (pôles) avec les circuits extérieurs.



- Les quadripôles électriques sont utilisés pour réaliser une fonction particulière : amplification, filtrage...
- Les échanges avec l'extérieur se font aux travers de deux pôles d'entrée et deux pôles de sortie.
- Les grandeurs I_1 et U_1 désignent les grandeurs d'entrée et I_2 et U_2 celles de sortie.
- Les quadripôles sont appelés actifs ou passifs selon s'ils contiennent ou non des sources d'énergie.

1.1. Matrices impédance et admittance d'un quadripôle

Les équations qui expriment les tensions d'entrée et de sortie d'un quadripôle en fonction des intensités et inversement, s'écrivent :

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} I_1 = Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 \\ I_2 = Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 \end{cases}$$

ou, en écriture matricielle : $[U] = [Z] \times [I]$ soit :
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [I] = [Y] \times [U] \text{ soit : } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$[Z]$ et $[Y]$ sont les matrices impédance et admittance du quadripôle

- **Éléments de matrice Z_{ij}** : ils se déduisent de mesures en circuit ouvert, effectuées sur le quadripôle :

- Sortie en circuit ouvert : $I_2 = 0$: $Z_{11} = \frac{U_1}{I_1}$ et $Z_{21} = \frac{U_2}{I_1}$

- Entrée en circuit ouvert : $I_1 = 0$: $Z_{22} = \frac{U_2}{I_2}$ et $Z_{12} = \frac{U_1}{I_2}$

Z_{11} et Z_{22} : sont respectivement *l'impédance d'entrée* et *l'impédance de sortie* du quadripôle ;

Z_{12} et Z_{21} sont des *impédances de transfert* en circuit ouvert.

- **Éléments de matrice Y_{ij}** : ils se déduisent de mesures en court circuit, effectuées sur le quadripôle.

- Sortie en court-circuit : $U_2 = 0$: $Y_{11} = \frac{I_1}{U_1}$ et $Y_{21} = \frac{I_2}{U_1}$

- Entrée en court-circuit : $U_1 = 0$: $Y_{22} = \frac{I_2}{U_2}$ et $Y_{12} = \frac{I_1}{U_2}$

Y_{11} et Y_{22} : sont respectivement *l'admittance d'entrée* et *l'admittance de sortie* du quadripôle ;

Y_{12} et Y_{21} sont des *admittances de transfert* en court-circuit.

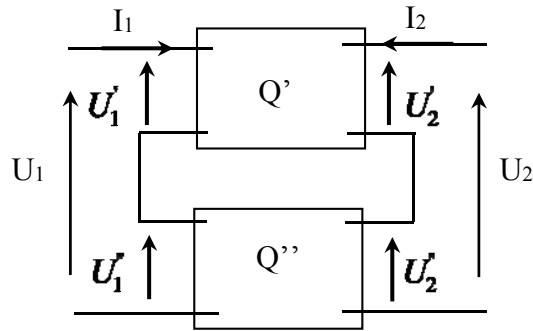
Remarques :

1. En application du théorème de réciprocité, on déduit que $Z_{12} = Z_{21}$. Les impédances de transfert d'un quadripôle sont égales.
2. De même, les admittances de transfert d'un quadripôle passifs sont égales : $Y_{12} = Y_{21}$.
3. Un quadripôle est dit symétrique si : $Z_{11} = Z_{22}$ ($Y_{11} = Y_{22}$).

1.2. Association de quadripôles

1.2.1. Groupement en série

- Deux quadripôles Q' et Q'' associés en série, sont montés selon la configuration de la figure suivante :

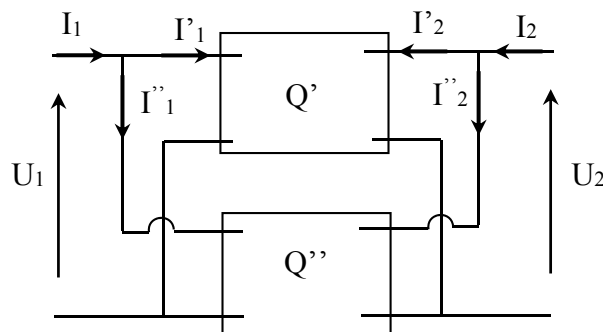


- On caractérise les quadripôles Q' et Q'' par leur matrices impédances [Z'] et [Z''] respectivement.
- L'association en série de Q' et Q'' constitue un quadripôle Q de matrice impédance [Z].
- La relation matricielle du quadripôle équivalent Q, s'écrira :

$$[U] = [Z] \times [I] \quad \text{avec} \quad [Z] = [Z'] + [Z''] \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

1.2.2. Groupement en parallèle

- Deux quadripôles Q' et Q'' de matrices admittances [Y'] et [Y''], sont montés en parallèle selon le schéma la figure suivante :



- Cette association de Q' et Q'' est équivalente à un quadripôle Q, de matrice admittance [Y].
- La relation matricielle du quadripôle équivalent Q, s'écrira :

$$[I] = [Y] \times [U] \quad \text{avec} \quad [Y] = [Y'] + [Y''] \quad \text{et} \quad [U] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

1.2.3. Quadripôles en T et en π

Les quadripôles les plus simples sont disposés soit en T soit en π .

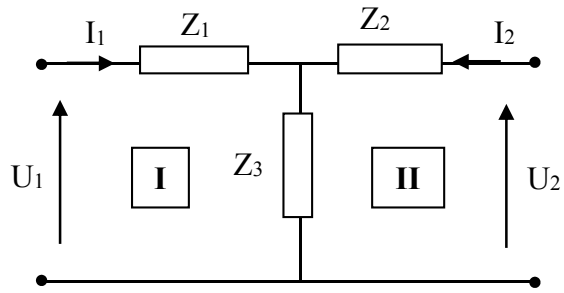
Montage T

On peut décomposer le circuit en 2 mailles :

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

avec : $Z_{11} = Z_1 + Z_3$; $Z_{12} = Z_{21} = Z_3$;
 $Z_{22} = Z_2 + Z_3$



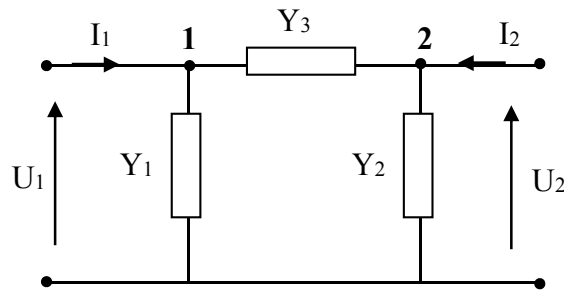
Montage en π

D’après la loi des nœuds, on peut écrire :

$$I_1 = Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2$$

$$I_2 = Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2$$

avec : $Y_{11} = Y_1 + Y_3$; $Y_{12} = Y_{21} = -Y_3$;
 $Y_{22} = Y_2 + Y_3$

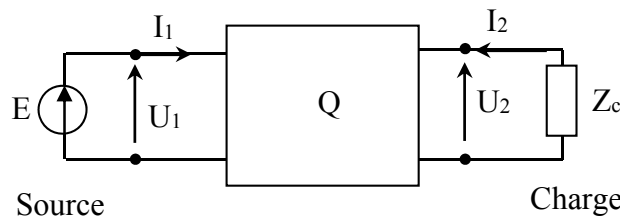


1.3. Quadripôles en charges

Un quadripôle est un ensemble d’éléments permettant de traiter des signaux ou de transférer de l’énergie fournie par un générateur pour la restituer à une charge extérieure. De ce fait, les quadripôles sont chargés par une impédance de charge.

1.3.1. Impédances d’entrée

- On suppose un quadripôle fermé en sortie sur une impédance Z_c , dite **impédance de charge** du quadripôle.



- La présence de Z_c introduit une relation supplémentaire dans les équations du quadripôle :

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = -Z_c I_2$$

ce qui donne : $I_2 = \frac{-Z_{21} I_1}{Z_{22} + Z_c}$

On déduit l’impédance d’entrée Z_e :

$$Z_e = \frac{U_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_c}$$

1.3.2. Impédance caractéristique

On définit une impédance de charge particulière qui soit égale à l'impédance d'entrée du quadripôle. Il s'agit de l'impédance caractéristique : $Z_e = Z_c = Z_0$.

Nous avons alors :

$$Z_e = Z_c = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_c}$$

Dans un quadripôle symétrique, l'impédance caractéristique aura l'expression suivante :

$$Z_0^2 = Z_c^2 = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$$

Ce qui donne

$$Z_0 = \sqrt{Z_{11}^2 - Z_{12}^2}$$

[Un quadripôle est dit **symétrique** s'il présente le même aspect vu de l'entrée et vu de la sortie]

1.4. Fonction de transfert

- La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire en régime sinusoïdal permanent est le rapport de l'amplitude complexe du signal de sortie \underline{U}_s à l'amplitude complexe du signal d'entrée \underline{U}_e :

$$H(\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$$

- Le rapport **G** des valeurs efficaces des tensions de sortie et d'entrée porte le nom « *gain* » de la fonction de transfert :

$$G = |H(\omega)| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}}$$

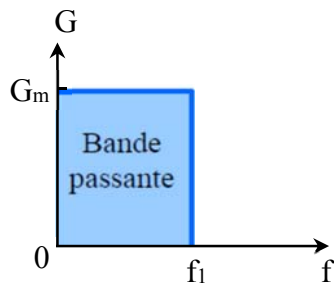
- La phase φ d'une fonction de transfert est l'argument de cette fonction de transfert. Elle correspond au déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée :

$$\varphi = \varphi_{u_s} - \varphi_{u_e} = \arg H(\omega)$$

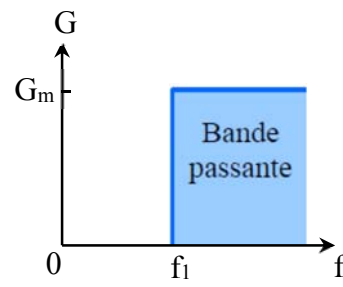
2. Filtre linéaire

2.1. Définition

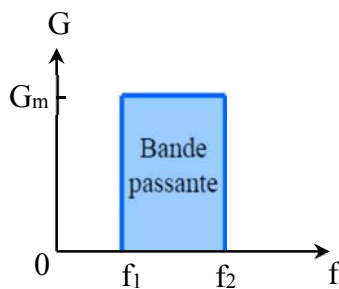
Un filtre électrique est un circuit électronique qui atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres, comme le montrent les courbes de réponses en fréquence suivantes :



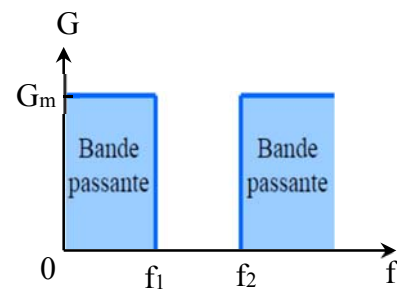
(a) passe bas



(b) passe haut



(c) passe bande



(d) coupe bande (filtre rejeteur de bande)

- a. **Filtre passe bas** : Un filtre passe bas favorise la transmission de signaux de fréquences basses, inférieures à une fréquence caractéristique f_1 ;
- b. **Filtre passe haut** : Un filtre passe haut transmet les signaux de fréquences supérieures à f_1 et atténue les autres.
- c. **Filtre passe bande** : Un filtre passe bande ne transmet que les signaux dont la fréquence est comprise à l'intérieur d'une bande de fréquence $B = |f_2 - f_1|$.
- d. **Filtre réjeteur** : Un filtre réjeteur idéal, élimine les signaux de fréquences entre les deux fréquences de coupure.

2.2. Représentation de Bode

2.2.1. Fonction de transfert d'un filtre

Le module de la fonction $H(\omega)$ d'un filtre dépend de la pulsation ω . Ce module noté G , est appelé **gain du filtre**

Selon la nature du gain en $\omega = 0$ ou $\omega = \infty$, on peut distinguer :

	$\omega = 0$	$\omega = \infty$
filtre passe bas	$G(0) \neq 0$	$G(\infty) = 0$
filtre passe haut	$G(0) = 0$	$G(\infty) \neq 0$
filtre passe bande	$G(0) = G(\infty) = 0, \quad G(\omega_l) = G_{\max}$	

2.2.2. Gain en décibel

Le déciBel (dB) est une unité sans dimension caractérisant le rapport de deux puissances moyennes P_1 et P_2 ; l'écart $x_{(dB)}$ entre P_1 et P_2 est défini par la relation :

$$x_{(dB)} = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$

- Dans un circuit électrique, la puissance moyenne consommée par une résistance est :

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

Il en résulte en notant X la grandeur électrique considérée (intensité I ou tension U) :

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^2 \Rightarrow x_{(dB)} = 10 \log \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{X_2}{X_1} \right)$$

Enfin, l'écart en décibels (dB) entre deux grandeurs électriques, est défini par : $x_{(dB)} = 20 \log \left(\frac{X_2}{X_1} \right)$

- Etant donné que le gain d'un filtre est défini par le rapport des tensions efficaces U_s et U_e (ou de tensions maximales (U_{sm} et U_{em}), on peut poser :

$$\text{gain en décibel : } G_{dB} = 20 \log \frac{U_s}{U_e} \quad \text{ou} \quad G_{dB} = 20 \log \frac{U_{sm}}{U_{em}}$$

Exemples :

$$\text{pour : } \frac{U_s}{U_e} = 10 \Rightarrow G_{dB} = 20$$

$$\frac{U_s}{U_e} = 10^{-2} \Rightarrow G_{dB} = -40$$

$$\frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB} = -3$$

2.2.3. Diagramme de Bode d'un filtre

2.2.3.1. Définition

On appelle diagramme de Bode d'un filtre l'ensemble des deux graphes :

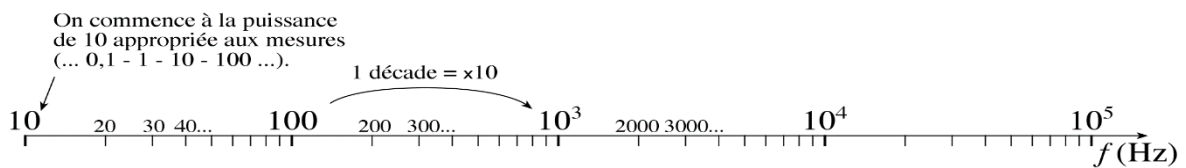
- Le gain en décibels de la fonction de transfert $H(\omega)$ tracé en fonction du logarithme décimal de la fréquence :

$$G_{dB} = 20 \log |H| = f(\log \omega) \Rightarrow \text{courbe de réponse en gain}$$

- La phase (l'argument) de la fonction de transfert tracée en fonction du logarithme décimal de la fréquence :

$$\varphi = \arg H = g(\log \omega) \Rightarrow \text{courbe de réponse en phase.}$$

- L'intérêt de l'échelle logarithmique est de faire intervenir un grand domaine de variation de ω : $10 < \omega < 10^6 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow 1 < \log \omega < 6$.
- Une décade est un intervalle de fréquence correspondant à un rapport de 10 entre les deux fréquences extrêmes.



2.2.3.2. Pulsation de coupure d'un filtre :

- Une pulsation de coupure ω_c d'un filtre est définie par : $G_{(\omega_c)} = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

soit en appliquant l'opérateur $20 \log$: $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB(\max)} - 3$ (en dB).

- La bande passante d'un filtre est l'intervalle de pulsations satisfait à :

$$\frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \leq G_{(\omega)} \leq G_{\max} \Rightarrow G_{dB(\max)} - 3 \leq G_{dB}(\omega) \leq G_{dB(\max)}$$

2.2.3.3. Diagramme asymptotique – Diagramme réel

Il s'agit de représenter les asymptotes des graphes $G_{dB} = f(\log \omega)$ et $\varphi = g(\log \omega)$, associées à $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$,

on en déduit ensuite le diagramme réel en faisant intervenir la pulsation de coupure.

2.2.4. Filtres passifs d'ordre 1 (circuits R, C série)

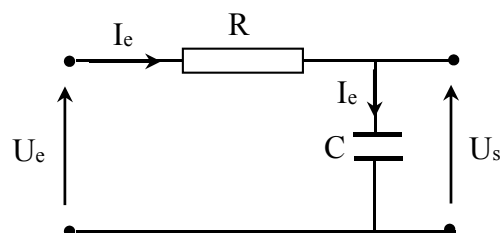
Examinons simultanément les deux cas possibles de circuits RC série :

2.2.4.1. Etude d'un filtre passe-bas du premier ordre

- Fonction de transfert**

$$\underline{U}_s = \frac{Z_C}{R + Z_C} \underline{U}_e = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{U}_e$$

(Pont diviseur de tension)



$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\text{Soit : } \boxed{G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{H}) = -\arctan(RC\omega)}$$

▪ **Pulsation de coupure ω_C - bande passante**

➤ $G_{\max} = G_{(\omega=0)} = 1$, d'où :

$$G_{(\omega_c)} = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega_c^2}} \Rightarrow R^2 C^2 \omega_c^2 = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \Rightarrow G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}, \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

➤ La bande passante du filtre passe-bas, telle que : $\frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \leq G_{(\omega)} \leq G_{\max}$, est l'intervalle $[0, \omega_c]$.

▪ **Diagramme de Bode**

On fait intervenir la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_c}$:

$$\boxed{\begin{cases} G_{dB} = 20 \log G = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right) = -10 \log(1 + x^2) \\ \varphi = -\arctan x \end{cases}}$$

➤ **Asymptotes de la réponse en gain :**

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \log x \rightarrow -\infty, G_{dB} \rightarrow 0 \quad (\text{asymptote horizontale})$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow G_{dB} \rightarrow -20 \log x \quad (\text{asymptote oblique, de pente -20dB par décade})$$

➤ **Asymptote de la réponse en phase :**

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

- Aux très basses fréquences, le gain est confondu avec l'axe $0x$. Aux très hautes fréquences, G_{dB} est une droite de pente -20dB/décade.
- La phase admet pour asymptote $\varphi = 0$ en basse fréquence et $\varphi = -\pi/2$ en hautes fréquences.

- Sachant que $G_{dB}(\omega_c) = -3dB$ et $\varphi(\omega_c) = -\pi/4$ pour $x = 1 (\omega = \omega_c)$, on peut représenter le diagramme de Bode comme suit :

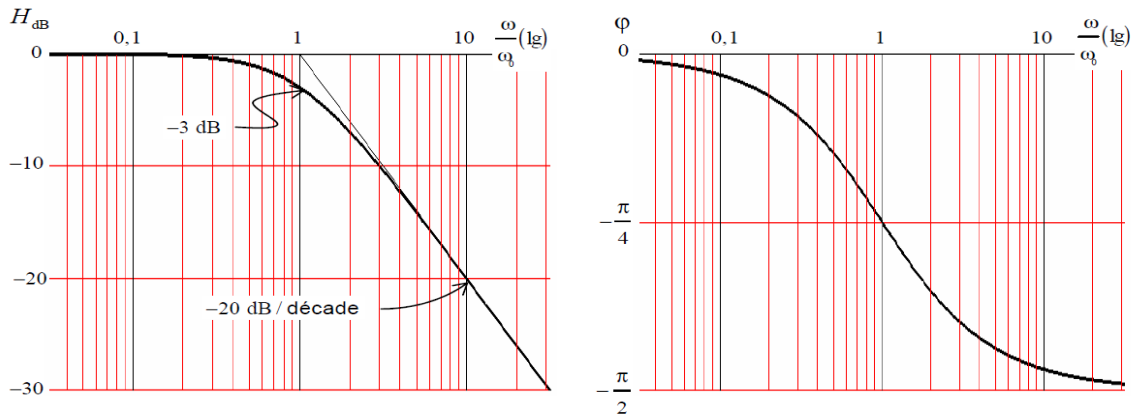


Diagramme de Bode d'un filtre passe bas d'ordre 1

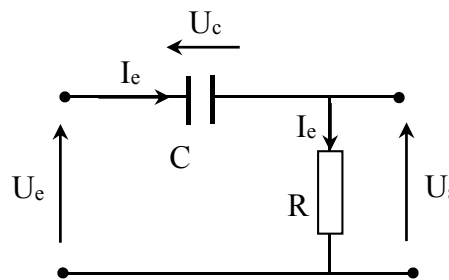
2.2.4.2. Etude d'un filtre passe-haut du premier ordre

▪ Fonction de transfert

D'après la figure précédente, nous avons :

$$\underline{U}_s = \frac{R}{R + Z_C} \underline{U}_e = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{U}_e$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$



Soit : $G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2}}}$ et $\varphi = \arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)$ (et $\cos \varphi > 0$)

▪ Pulsation de coupure ω_c - bande passante

➤ $G_{max} = G_{(\omega=\infty)} = 1, G_{(\omega=0)} = 0$ (filtre passe - haut)

La pulsation de coupure ω_c est définie par :

$$G_{(\omega_c)} = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 C^2 \omega_c^2}}} \Rightarrow R^2 C^2 \omega_c^2 = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$\underline{H} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \Rightarrow G = \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 + 1}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

➤ La bande passante de ce filtre passe-haut (d'ordre 1), tel que $\frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \leq G_{(\omega)} \leq G_{\max}$, est l'intervalle $[\omega_c, \infty[$.

▪ **Diagramme de Bode**

En posant $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ (pulsation réduite), il vient :

$$\begin{cases} G_{dB} = 20 \log G = 20 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{-1/2} = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan x \end{cases}$$

➤ **Asymptotes de $G_{dB}(\log x)$:** $\begin{cases} x \rightarrow \infty \Rightarrow G_{dB} \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow G_{dB} \rightarrow 20 \log x \text{ (pente } +20\text{dB/décade)} \end{cases}$

➤ **Asymptotes de $\varphi(\log x)$:** $\begin{cases} x \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \rightarrow 0 \end{cases}$

- Aux très hautes fréquences, le gain est confondu avec l'axe $0x$. Aux très basses fréquences, G_{dB} est une droite de pente $+20\text{dB/décade}$.
- La phase admet pour asymptote $\varphi = \pi/2$ en basse fréquence et $\varphi = 0$ en hautes fréquences.
- Sachant que $G_{dB}(\omega_c) = -3\text{dB}$ et $\varphi(\omega_c) = \pi/4$ pour $x = 1 (\omega = \omega_c)$, on peut représenter le diagramme de Bode comme suit :

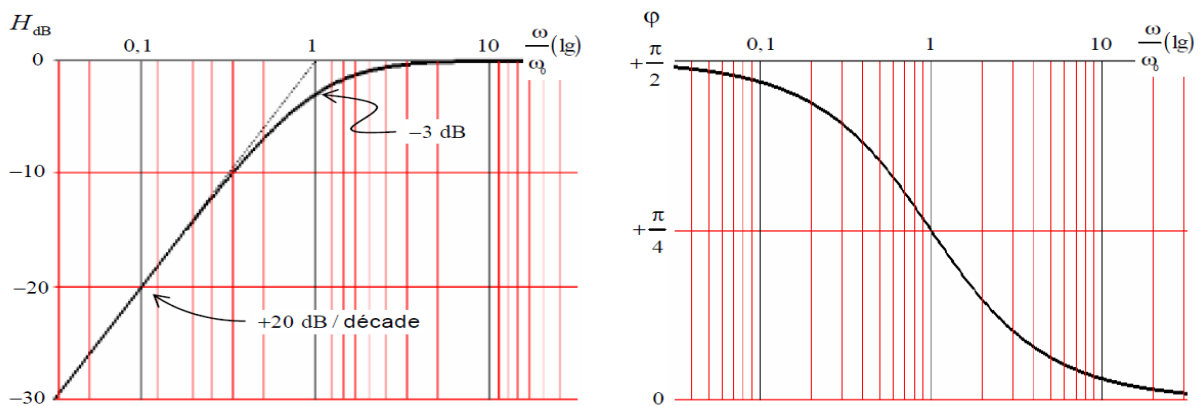
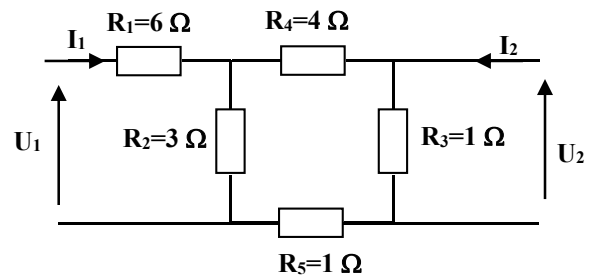


Diagramme de Bode d'un filtre passe haut d'ordre 1

Exercices du chapitre 4

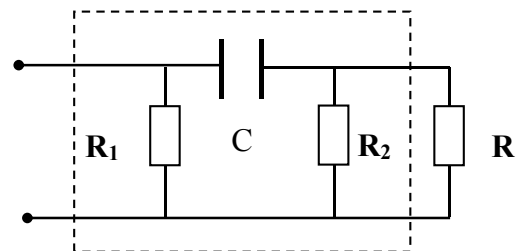
Exercice 1

Déterminer les paramètres Z du réseau suivant ?



Exercice 2

Déterminer l'impédance d'entrée Z_e du quadripôle représenté sur la figure ci-contre, alimentant une charge résistive pur $Z_c=R$



Exercice 3

Soit le filtre correspondant à la figure ci-contre :

1- Calculer sa fonction de transfert $H(\omega) = \frac{U_s}{U_e}$.

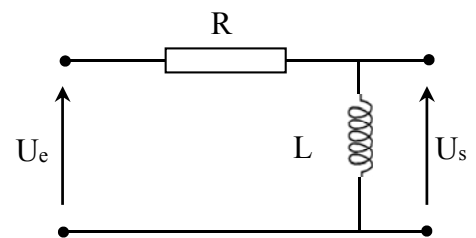
2- Donner les expressions de l'amplitude $G(\omega)$ et de la phase $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert.

3- Déterminer la fréquence de coupure de ce filtre ω_c à -3dB.

4- Donner les expressions du gain G_{dB} et de la phase φ en fonction de ω et ω_c .

5- Représenter les asymptotes des deux graphes $G_{dB} = f(x)$ et $\varphi = g(x)$, avec : $x = \frac{\omega}{\omega_c}$.

6- Tracer le diagramme de Bode en en utilisant le tableau suivant :



x	10^{-2}	10^{-1}	1	10	100	10^3
G_{dB}						
φ						