Chapitre 1

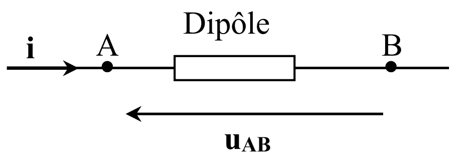
Réseaux électriques en régime continu

Un circuit linéaire est un circuit constitué de dipôles linéaires (résistance, condensateur, bobine, générateur de tension et/ou de courant). Nous donnons dans ce chapitre des lois simples permettant de déterminer simplement l'intensité et/ou la tension aux bornes d'un dipôle quelconque dans un circuit fonctionnant en régime continu, connaissant les caractéristiques des dipôles le constituant.

1. Définitions

1.1. Dipôle

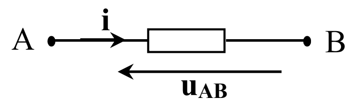
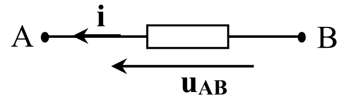
Un dipôle est un circuit accessible par deux bornes A et B, il peut être caractérisé par, un courant **i** qui le traverse et la tension **u,** entre ses bornes.



i : courant électrique circulant de A à B, s'exprime en **Ampère (A)**.

$\mathbf{u_{AB} = u_A - u_B}$ **:** tension (différence de potentiel) entre A et B, s'exprime en **volt (V)**.

- La **caractéristique** d'un dipôle est la relation entre **u** et **i**, elle est écrite sous la forme **u (i)**.
- Le sens de passage du courant peut être : $\mathbf{i_{AB}}$ ou $\mathbf{i_{BA}}$, avec $\mathbf{i_{AB} = - i_{BA}}$.
- Un dipôle peut être un récepteur ou un générateur :

récepteur	les flèches du courant et de la tension sont en sens inverse	
générateur	les flèches du courant et de la tension sont dans le même sens	

1.2. Régimes électriques

Un circuit électrique linéaire est alimenté par des générateurs. Il existe deux types de sources (générateurs) continues et alternatives :

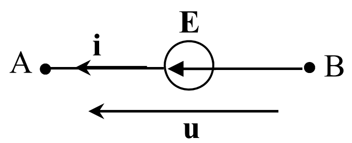
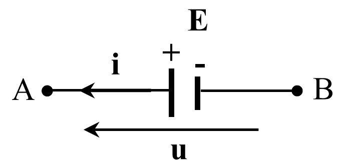
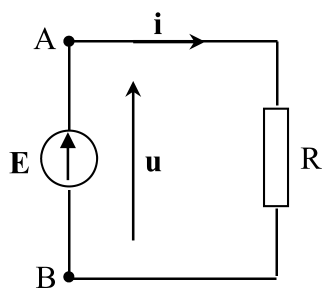
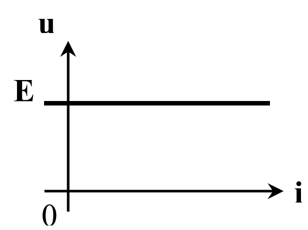
- **Régime continu (statique) :** les grandeurs électriques (tensions et courant) sont invariantes dans le temps.
- **Régime variable (dynamique) :** les grandeurs électriques évoluent dans le temps, les sources sont dites alternatives.

1.3. Générateurs de tension et courant en régime continu

1.3.1. Générateur de tension idéal

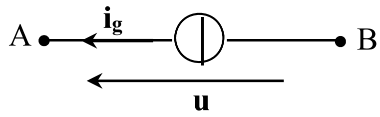
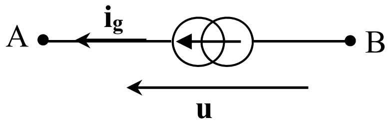
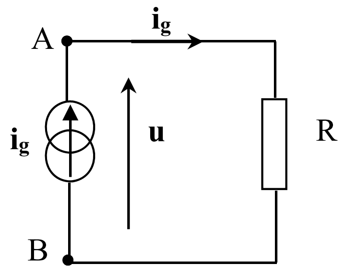
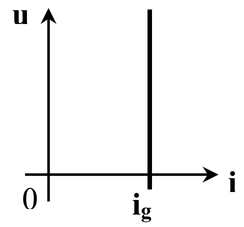
Un générateur (source) de tension continue est un dipôle capable d'imposer une tension à ses bornes constante quelle que soit l'intensité du courant qui le traverse. Ses deux représentations sont :

E : est la force électromotrice du générateur (f.é.m)

représentations	**dans un circuit**	**la caractéristique**
 		

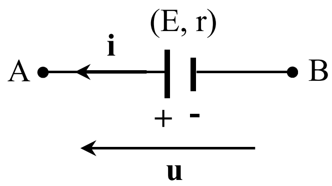
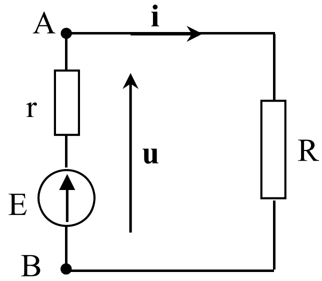
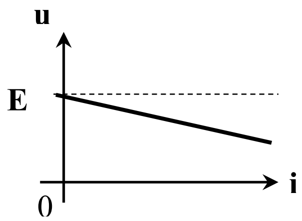
1.3.2. Générateur de courant idéal

Un tel générateur délivre un courant, dit courant de court-circuit, indépendant de la tension présente à ses bornes. Ses deux représentations sont :

représentations	dans un circuit	la caractéristique
 		

1.3.3. Générateur de tension réel (ohmique)

Dans la réalité, les générateurs ne sont pas parfaits et on considère qu'un modèle plus proche de la réalité consiste à associer un générateur de tension idéal en série avec une résistance. Cette résistance est appelée « résistance interne » du générateur.

représentation	dans un circuit	la caractéristique
		

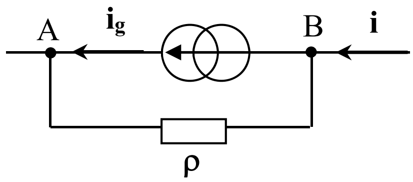
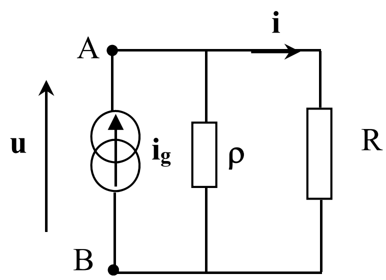
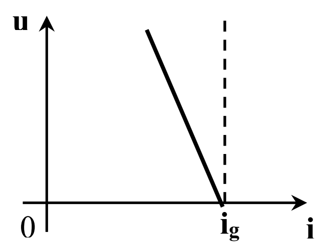
L'équation de la caractéristique : $u = E - r\,i$

E : est la force électromotrice du générateur (f.é.m)

r : la résistance interne

1.3.4. Générateur de courant réel (ohmique)

Dans ce cas, on associe un générateur de courant idéal en parallèle avec une résistance.

représentations	dans un circuit	la caractéristique
		

L'équation de la caractéristique du générateur de courant réel est : $i = i_g - \dfrac{u}{\rho}$

1.3.5. Puissance électrique (Adaptation)

La puissance électrique fournie par un générateur (E, r), à une charge résistive R, s'exprime par :

$$P(R)=Ri^2 \qquad avec \qquad i=\frac{E}{(R+r)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P(R)=Ri^2=\frac{E^2\,R}{(R+r)^2}}$$

P(R) est maximum, si $\dfrac{\partial P(R)}{\partial R}=0$, d'où : $\boxed{R=r \qquad et \qquad P(R)_{\max}=\dfrac{E^2}{4r}}$

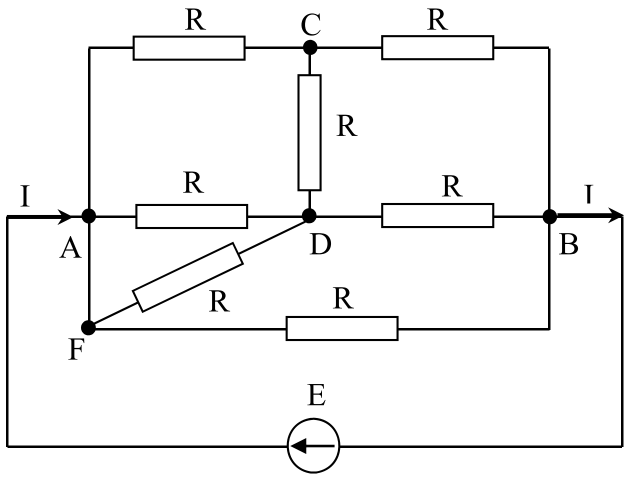
- Un générateur délivre une puissance maximum dans une charge résistive (résistance) **R**, lorsque celle-ci est égale à sa résistance interne r $(R = r)$. Dans ce cas, on dit que le générateur est **adapté à la charge**.

2. Réseaux électriques linéaires en régime continu

2.1. Réseau électrique linéaire

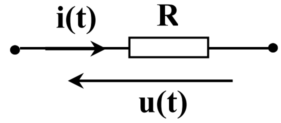
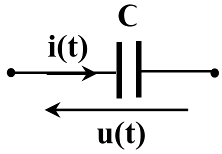
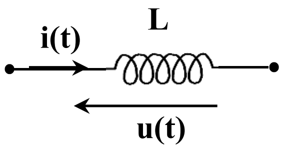
Un réseau électrique linéaire est une association d'éléments passifs (résistances, condensateurs et inductances) et d'éléments actifs (générateurs de tension et de courant), connectés entre eux par des conducteurs supposés sans résistance (parfaits).

- On appelle **nœud** d'un réseau, un point du circuit où aboutissent au moins trois conducteurs (A, B, C…)
- Une **branche** du réseau est une portion de circuit, situé entre deux nœuds consécutifs (AC, AD, CB, …)
- Une **maille** est une boucle fermée délimitée par des branches du réseau électrique (ACDA), (CBDC) …

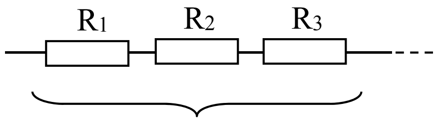
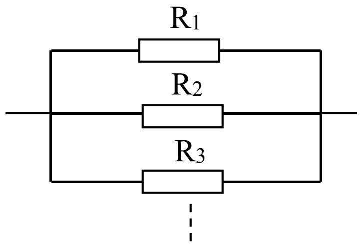
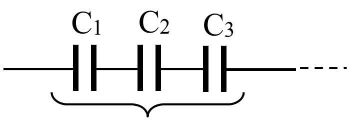
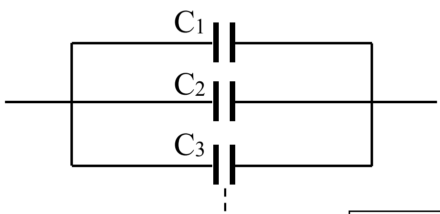


2.2. Dipôles passifs linéaires

Trois dipôles passifs sont couramment utilisés dans les circuits électriques.

Dipôle passif	Loi fondamentale	Représentation	En régime continu
• **Résistance** R (Ω) • Conductance $G=1/R$ (S) [siemens : (Ω^{-1})]	$u(t)=R.i(t)$ $i(t)=G.u(t)$ (Loi d'Ohm)		**u** et **i** sont constants : • $U=R\,I$ • $P(t)=U.I=R.I^2=U^2/R$ en watt (W)
• **Condensateur** **C** : Capacité (F / Farad)	$i(t)=C.\dfrac{du(t)}{dt}$		**u** est constante et **i** est nul : • le condensateur est un **interrupteur ouvert**.
• **Inductance** **L** : inductance de la bobine (H / Henry)	$u(t)=L.\dfrac{di(t)}{dt}$		**i** est constant et **u** est nulle : • la bobine parfaite est équivalente à un **fil**.

2.3. Groupement des dipôles passifs

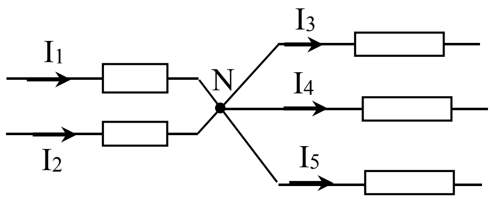
Dipôle	**Groupement en série**	**Groupement en parallèle**
Résistance	 $\boxed{R_{eq}=R_1+R_2+R_3+\ldots}$	 $\dfrac{1}{R_{eq}}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\ldots$ $G_{eq}=G_1+G_2+G_3+\ldots$
Condensateur	 $\boxed{\dfrac{1}{C_{eq}}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}+\dfrac{1}{C_3}+\ldots}$	 $\boxed{C_{eq}=C_1+C_2+C_3+\ldots}$
Inductance	Les inductances vérifient les mêmes règles d'association que les résistances, à condition qu'il n'existe aucun couplage entre elles.	

2.4. Lois de Kirchhoff

2.4.1. Loi de Kirchhoff des nœuds

La première loi de Kirchhoff est la loi des nœuds : La somme des intensités des courants entrants dans un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en sortent (pas d'accumulation de charge).

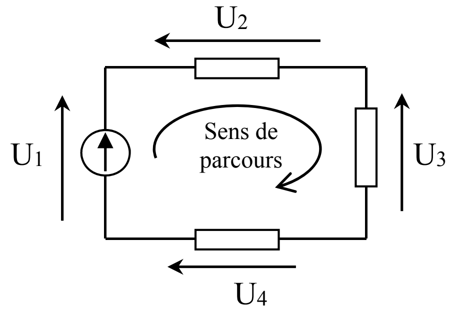
$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$



2.4.2. Loi de Kirchhoff des mailles

La deuxième loi de Kirchhoff stipule : La somme algébrique des différences de potentiel (ou tension) le long d'une maille quelconque est nulle :

$$U_1 - U_2 - U_3 + U_4 = 0$$

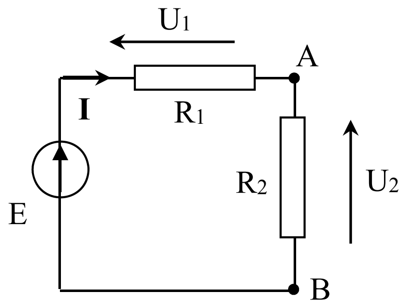


Toutes les tensions U_i sont orientées en fonction du sens de parcours sur la maille

2.5. Théorèmes fondamentaux

2.5.1. Pont diviseur de tension

- Le schéma d'un pont diviseur de tension est donné à la figure suivante :



- Il s'agit d'une application directe de la mise en série de deux résistances :

$$E = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I \qquad \text{d'où} \qquad I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

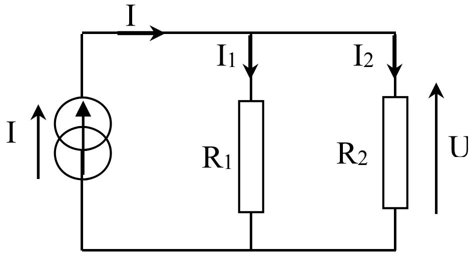
La tension aux bornes de la résistance R_2 vaut : $\boxed{U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E}$

- D'une façon générale, la tension aux bornes d'une résistance placée dans un circuit comportant n résistances en série, alimenté par une source de tension E est :

$$\boxed{U_i = \frac{R_i}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} E}$$

2.5.2. Pont diviseur de courant

- Le schéma d'un pont diviseur de courant est donné à la figure suivante (résistances en parallèle) :



- Appelons **U** la différence de potentiel qui se trouve aux bornes des différents éléments en parallèle, nous obtenons :

$$U = R_2\, I_2 = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2} I \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I}$$

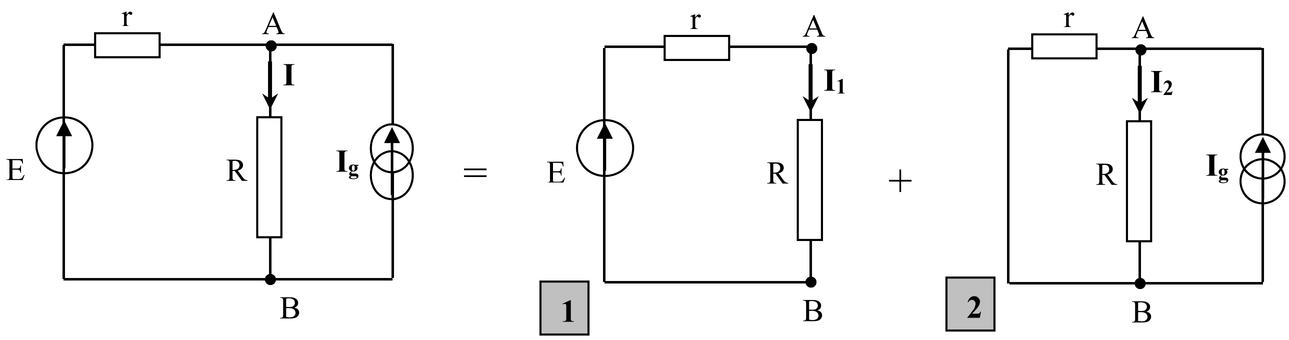
- Si maintenant, nous divisons le numérateur et le dénominateur par le produit ($R_1.R_2$), nous obtenons la relation suivante : $\boxed{I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I}$

- D'une façon générale, le courant traversant une résistance R_i placée dans un circuit comportant n résistances en parallèle, alimenté par une source idéale de courant I, est :

$$\boxed{I_i = \frac{G_i}{G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n} I}$$

2.5.3. Théorème de superposition

Prenons par exemple le montage de la figure suivante (circuit alimenté par deux sources indépendantes) :



- **montage 1** : la source de courant $\mathbf{I_g}$ étant neutralisée, le générateur **(E, r)** débite un courant $\mathbf{I_1}$ dans la branche AB du circuit : $I_1 = \frac{E}{(R+r)}$

- **montage 2** : le générateur **(E, r)** étant neutralisé (remplacé par sa résistance interne), la source de courant activait seule. Le courant dans la résistance **R** serait **I_2** : $I_2 = \frac{r}{(R+r)} I_g$

Le courant **I** dans la branche AB dû à la contribution des deux sources sera : **$I = I_1 + I_2$**

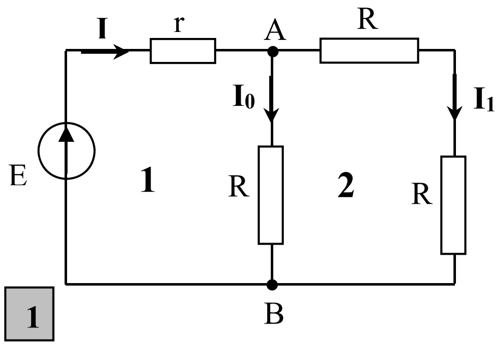
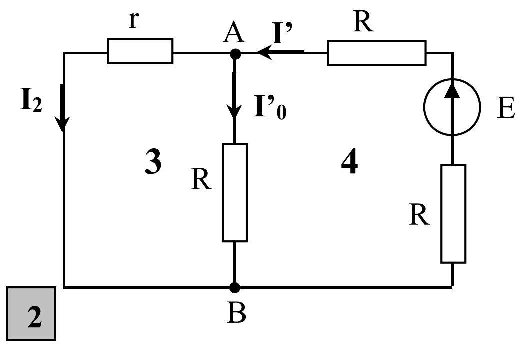
$$\boxed{I = I_1 + I_2 = \frac{E + I_g r}{(R+r)}}$$

2.5.4. Théorème de réciprocité

Soit deux branches i et j d'un réseau. Si on considère une source de tension **E**, située dans la branche **i** du réseau. Cette source produit dans la branche **j** un courant **I_j**. La même source **E**, placée dans la branche **j**, produirait dans la branche **i**, un courant **I_i** égal à :

$$\boxed{I_i = I_j}$$

<u>Exemple :</u>

<u>montage 1</u> : Calcul du courant I_1	<u>montage 2</u> : Calcul du courant I_2
	
$\begin{cases} \text{maille 1 : } RI_0 - E + rI = 0 \\ \text{maille 2 : } 2RI_1 - RI_0 = 0 \Rightarrow I_1 = \dfrac{E}{2R+3r} \\ \text{nœud A : } I = I_0 + I_1 \end{cases}$	$\begin{cases} \text{maille 3 : } rI_2 - RI'_0 = 0 \\ \text{maille 4 : } RI'_0 - E + 2RI' = 0 \Rightarrow I_2 = \dfrac{E}{2R+3r} \\ \text{nœud A : } I' = I'_0 + I_2 \end{cases}$
donc : $\boxed{I_1 = I_2}$	

2.5.5. Théorèmes de Thévenin et de Norton

2.5.5.1. Théorème de Thévenin

Il est possible de remplacer une portion de réseau électrique linéaire, considérée entre deux bornes A et B, par **un générateur de tension**, dit « ***générateur de Thévenin*** », ayant les caractéristiques suivantes :

- Sa résistance interne $\mathbf{R_{Th}}$ est la résistance équivalente entre les bornes A et B lorsque chaque générateur indépendant est passivé (remplacé par sa résistance interne).
- Sa f.é.m $\mathbf{E_{Th}}$ est la tension mesurée entre A et B à vide (le dipôle n'est pas connecté à d'autres éléments externes.

Prenons par exemple le montage de la figure suivante :

- La résistance $\mathbf{R_{Th}}$ est obtenue en passivant la source de tension E :

$$R_{Th} = (R_1 // R_2) = \frac{R_1 \ R_2}{R_1 + R_2}$$

- La tension $\mathbf{E_{Th}}$ est la tension obtenue entre A et B (tension aux bornes de R_2) :

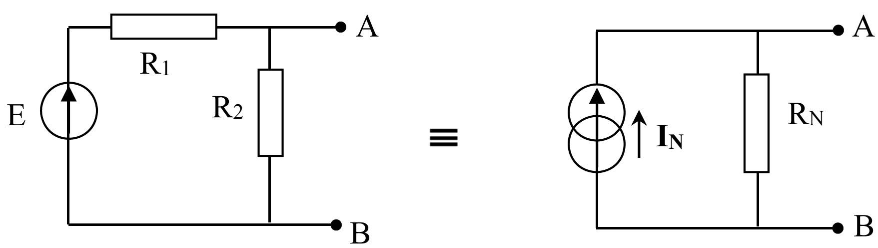
$$E_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

2.5.5.2. Théorème de Norton

Il est possible de remplacer une portion de réseau électrique, considérée entre deux bornes A et B, par un **générateur de courant**, dit « ***générateur de Norton*** », ayant les caractéristiques suivantes :

- Sa résistance interne $\boldsymbol{R_N}$ est la résistance de Northon.
- Son courant $\boldsymbol{I_N}$ est égal à l'intensité de court-circuit lorsque l'on relie les points A et B par un fil.

Prenons par exemple le montage de la figure suivante :



- La résistance R_N est obtenue an passivant la source de tension E : $R_N = \frac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2}$

- Le courant I_N est le courant obtenu en court-circuitant la résistance R_2 : $I_N = \frac{E}{R_1}$

Remarque : Le passage du modèle d'un générateur de Thévenin à celui d'un générateur de Norton conduit à trouver :

$$\boxed{R_{Th} = R_N \qquad et \qquad I_N = E_{Th}/R_{Th}}$$

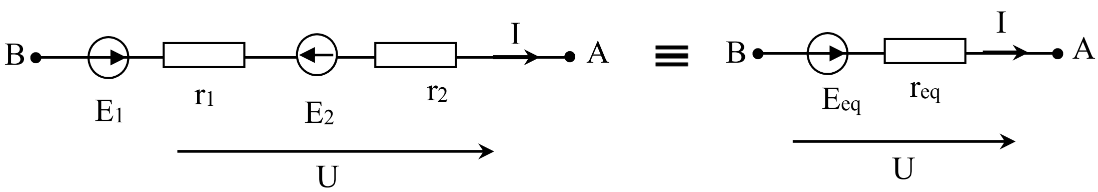
2.5.6. Association des générateurs de tension en série

Le dipôle équivalent à l'association en série de **n** générateurs de tension de résistances internes $\mathbf{r_k}$ et de force électromotrice $\mathbf{E_k}$ est un générateur de tension unique, dont :

- la résistance équivalente est $\boxed{r_{éq} = \sum_{k=1}^{n} r_k}$;

- la force électromotrice équivalente est $\boxed{E_{éq} = \sum_{k=1}^{n} E_k}$.

<u>Exemple :</u>



$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} E_{eq} &= E_1 - E_2 \\ r_{eq} &= r_1 + r_2 \end{aligned}$$

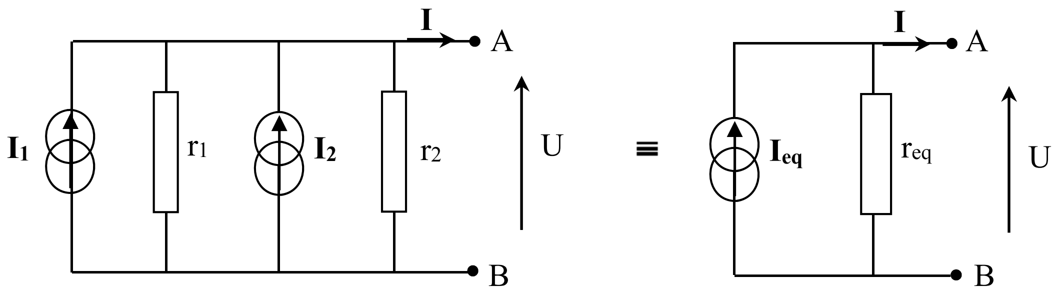
2.5.7. Association des générateurs de courant en parallèle

Le dipôle équivalent à l'association en parallèle de **n** générateurs de courant de résistances internes $\boldsymbol{r_k}$ et de courant $\boldsymbol{I_k}$ est un générateur de courant unique, dont :

- la conductance équivalente est : $\boxed{G_{éq} = \sum_{k=1}^{n} G_k}$;

- le courant équivalent est égal à : $\boxed{I_{éq} = \sum_{k=1}^{n} I_k}$.

Exemple :

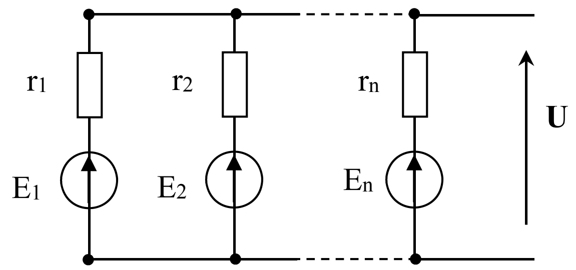


$$I_{eq} = I_1 + I_2$$

$$\Rightarrow \quad G_{eq} = \frac{1}{r_{eq}} = G_1 + G_2$$

2.5.8. Théorèmes de Millman

- Le théorème de Millman, dit aussi « **théorème des nœuds** », permet de déterminer le potentiel d'un nœud où aboutissent des branches composées d'un générateur de tension réel.



- La démonstration de ce théorème consiste à transformer chaque branche en générateur de courant :

$$I_i = \frac{E_i}{r_i} = G_i E_i$$

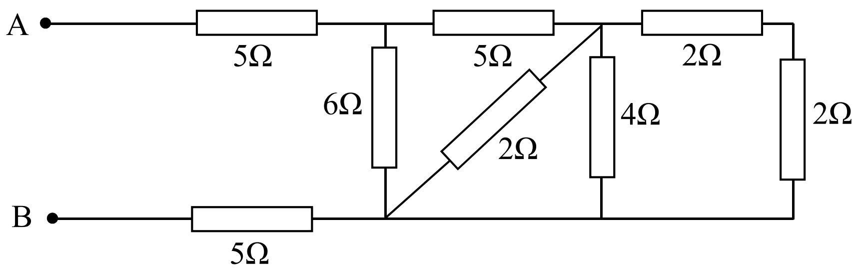
Le courant résultant ($I = \sum_i I_i$) circule dans la résistance équivalente à l'ensemble des résistances en parallèle ($G = \sum_i G_i$). La tension U s'écrit donc :

$$\boxed{U = \frac{I}{G} = \sum_{i=1}^{n} G_i E_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} G_i}$$

Exercices du chapitre 1

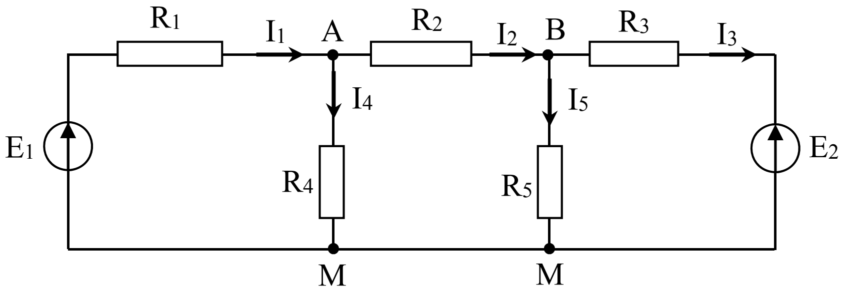
Exercice 1

Calculer la résistance équivalente vue des points A et B pour le réseau suivant :



Exercice 2

Soit le montage suivant :

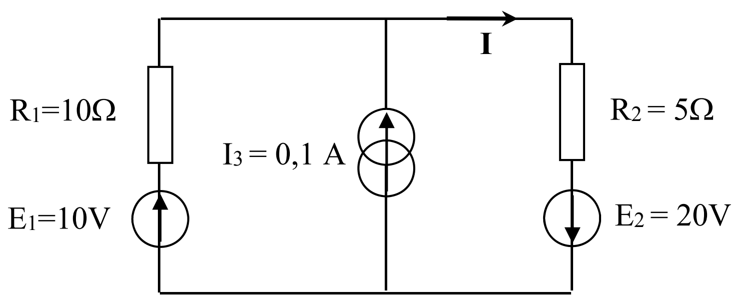


Déterminer les intensités I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5 dans chaque branche du réseau.

Application numérique : $R_1=R_2=R_3= 1\Omega$, $R_4=R_5= 2\Omega$, $E_1= 1V$ et $E_2= 2V$

Exercice 3

Dans le montage représenté sur la figure ci-contre, déterminer le courant ***I*** circulant dans la résistance R_2 en appliquant le principe de superposition.



Exercice 4

Déterminer l'intensité du courant ***I*** circulant à travers la résistance R_3, en utilisant :

1. les lois de Kirchhoff
2. le théorème de Thévenin

Application numérique :

$E_1 = 20$ V ; $E_2 = 10$ V;

$R_0 = R_1 = R_3 = 10\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$.