Chapitre 2
Réseaux électriques en régime transitoire

En pratique, entre l'instant où aucun courant ne circule et celui où, expérimentalement, on constate que le régime est continu, il existe une période où les courants et tensions évoluent avec le temps pour atteindre leur valeur définitive ; ce régime temporaire est appelé : « régime transitoire ».

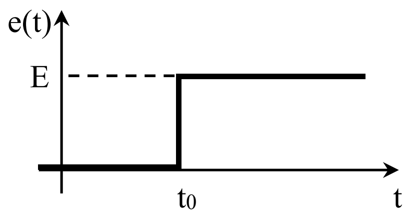
1. Echelon de tension

Soit une source de tension de force électromotrice (f.é.m.) $e(t)$ définie par :

$$e(t)=\begin{cases}0 & pour \quad t<t_0\\ E & pour \quad t>t_0\end{cases}$$

avec : E constant

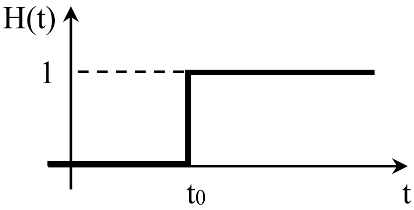
On dit qu'une telle source délivre un *échelon de tension* ; le graphe de cette f.é.m. est représenté sur la figure suivante :



La méthode la plus simple pour réaliser une telle source consiste à prendre une source de tension E continue et un interrupteur en série, que l'on ferme à $t = t_0$.

Fonction « échelon » ou de Heaviside, désignée par $H(t)$, elle est définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \forall \quad t < t_0 \\ 1 & \forall \quad t > t_0 \end{cases}$$

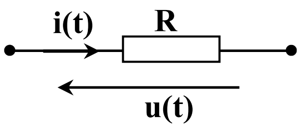
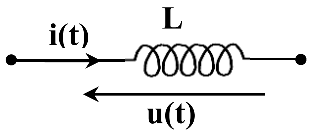
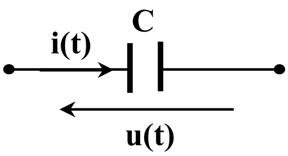
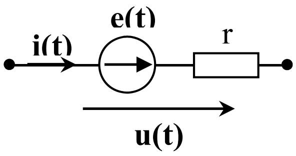


Elle permet de représenter les fonctions discontinues et constantes par morceaux. Ainsi l'échelon de tension défini au début de ce paragraphe s'écrit :

$$e(t) = E\,H(t)$$

2. Dipôles de base des circuits

La relation tension-courant d'un dipôle passif ou actif à un instant donné est une relation instantanée.

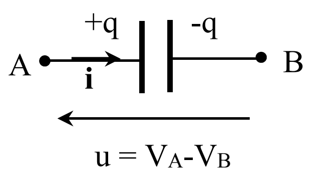
Dipôle	Symbole	Relation tension-courant
Résistance		$u(t) = R\,i(t)$
Inductance (Self)		$u(t) = L\dfrac{di}{dt}$; $i(t) = \dfrac{1}{L}\int u\,dt$
Condensateur		$i(t) = C\dfrac{du}{dt}$; $u(t) = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$
Générateur		$u(t) = e(t) - r\,i(t)$

3. Etude d'un circuit RC

3.1. Notions de base sur les condensateurs

Un condensateur est constitué de deux surfaces conductrices séparées par un isolant (diélectrique) qui peut être de l'air sec, de l'alumine ... Les charges situées sur ces deux surfaces sont égales en valeurs absolue et de signes opposées.

Symbole :

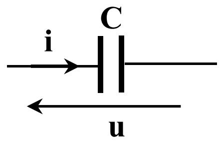


La charge **q** est reliée à la différence de potentiel **u_{AB}** par la relation : $q = u_{AB} \times C$

C : est la capacité du condensateur, elle s'exprime en Farad (F).

En utilisant la convention récepteur (**i** et **u** sont de sens opposés), on obtient la relation :

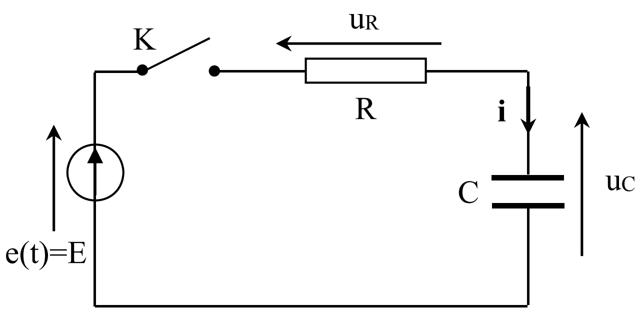
$$i\,(t) = C\,\frac{d\,u}{d\,t} = \frac{d\,q(t)}{d\,t}$$



A noter, si **i** et **u** sont de même sens, alors : $\boxed{i\,(t) = -C\,\frac{d\,u}{d\,t}}$

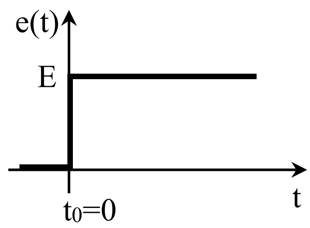
3.2. Réponse d'un circuit (d'un dipôle) RC à un échelon de tension

Un dipôle RC est l'association en série d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R. Le montage suivant permet d'étudier la réponse d'un circuit RC à un échelon de tension. Le condensateur est initialement déchargé.



A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K (le condensateur est initialement déchargé). Le condensateur va se charger progressivement jusqu'à ce que s'établisse à ses bornes une tension opposée à la f.é.m E.

$$\begin{cases} t < 0: & e(t) = 0 \quad \Rightarrow \; u_c(t) = 0 \\ t > 0: & e(t) = E = R\,i + u_c \end{cases}$$



Pour t > 0, la loi des mailles s'écrit :

$$E = u_R + u_C = R\,i + u_C = R\,C\,\frac{d\,u_C}{d\,t} + u_C$$

Soit : $$\frac{d\,u_C}{dt} + \frac{u_C}{R\,C} = \frac{E}{R\,C}$$

Pour déterminer $u_c(t)$ lorsque $t > 0$, il nous faut résoudre cette équation différentielle qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants, avec second membre. Sa solution générale est égale à la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (dite équation homogène) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

Résolution de l'équation sans second membre :

$$\frac{d\,u_C}{dt} + \frac{u_C}{R\,C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du_c}{u_c} = -\frac{1}{RC}dt$$

Si deux expressions sont égales, leurs primitives sont égales à un constant prés :

$$\Leftrightarrow \quad \ln u_c = -\frac{1}{RC}t + const$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{[\ln u_c]} = e^{\left[-\frac{1}{RC}t + const\right]}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_c(t) = e^{-\frac{1}{RC}t} \times e^{const}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_c(t) = A\,e^{-\frac{1}{RC}t}$$

avec A : constante à définir ultérieurement.

Solution particulière : obtenue lorsque $t \to \infty$, donc en régime permanent.

Lorsque $t \to \infty$, tous les courants et les tensions sont constants car le générateur est constant :

$$u_c = const \;\Rightarrow\; i = 0 \;\Leftrightarrow\; u_c(t) = E$$

Solution générale :

La solution générale est égale à la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière :

$$u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

tel que : $\tau = RC$ constante de temps du circuit, ou temps de relaxation.

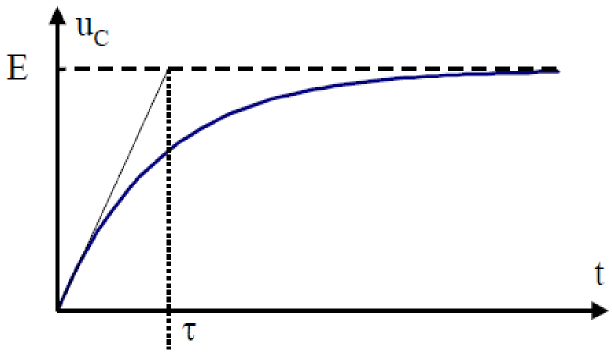
Détermination de la constante A par les conditions initiales :

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas présenter de discontinuités :

$u_c(t = 0^-) = u_c(t = 0^+) = 0$, donc : $A = -E$

enfin : $$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

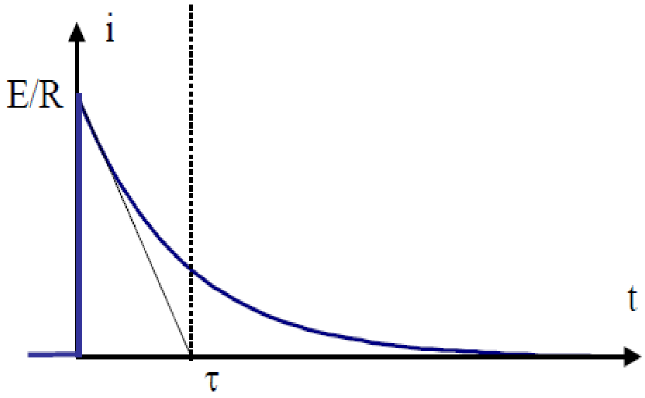
La courbe $u_c = f(t)$ est représentée comme suit :



La charge du condensateur n'est pas instantanée, c'est un phénomène transitoire.

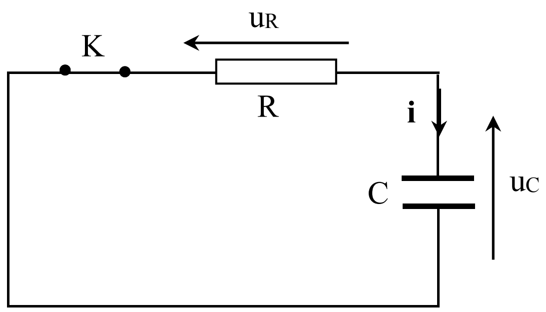
L'expression de i(t) :

$i(t) = C\dfrac{du_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = \dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$



3.2.1. Décharge d'un condensateur dans une résistance

Initialement le condensateur porte la charge Q_0. A l'instant t = 0 on ferme l'interrupteur K. Le condensateur se décharge alors à travers la résistance R jusqu'à annulation de sa charge. Le courant devient alors nul.



à $t = 0$: $u_C = u_{C0} = E = Q_0/C$

loi des mailles :

$u_C + u_R = 0 \quad \Rightarrow \quad u_C + Ri = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = 0$$

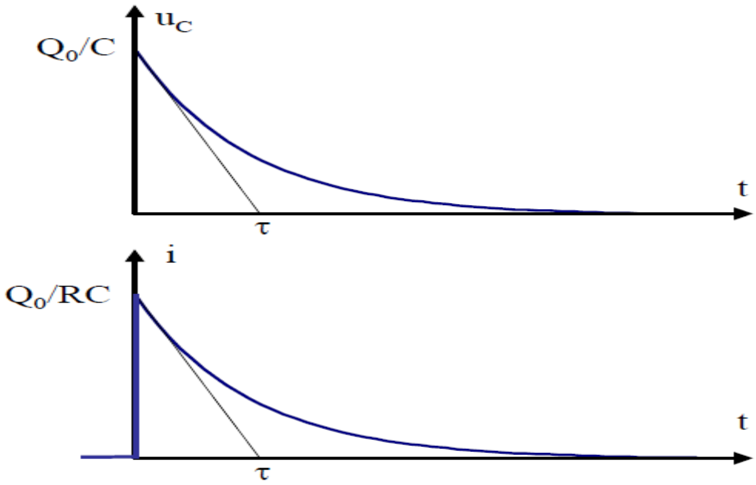
L'homogénéité de cette équation montre que RC a la dimension d'un temps. Posons $\tau = RC$.

τ est appelé constante de temps du circuit RC.

L'équation s'écrit : $$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, sans second membre, dont la solution finale est :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{Q_0}{C} e^{-t/\tau} \qquad et \qquad i(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau}}$$



3.2.2. Energie électrostatique

Un condensateur emmagasine de l'énergie lors de la charge, il restitue cette énergie emmagasinée lors de la décharge. L'énergie emmagasinée par le condensateur pour $t \to \infty$ (c'est-à-dire en fin de charge du condensateur) a pour expression :

$$\varepsilon_C = \int P(t)\,dt = \int u(t).i(t).dt = \frac{Q_0^2}{C^2 R}\int_0^\infty \exp(-2t/\tau)dt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty \exp(-2t/\tau)dt = \frac{E^2}{R}\left[\frac{\exp(-2t/\tau)}{-2/\tau}\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\varepsilon_C = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{Q_0^2}{2C}}$$

4. Etudes des circuits du deuxième ordre

4.1. Equations différentielles d'un circuit

Les équations différentielles linéaires rencontrées dans l'étude des régimes transitoires possèdent la forme suivante :

$$a\frac{d^2 f}{dt^2}+b\frac{df}{dt}+cf(t)=g(t)$$

En règle générale, les paramètres a, b, c sont des nombres réels positifs. La solution d'une telle équation est :

$$f(t)= f_1(t)+ f_2(t)$$

→où $f_1(t)$ représente la solution de l'équation sans second membre :

$$a\frac{d^2 f}{dt^2}+b\frac{df}{dt}+cf(t)=0$$

On recherche $f_1(t)$ en calculant les racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle sans second membre :

$$ar^2 + br + c = 0$$

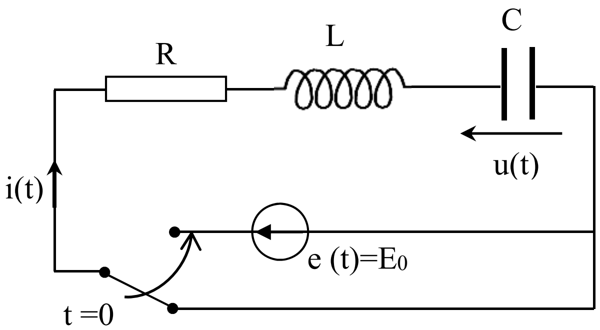
→ $f_2(t)$ est la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

$f_1(t)$ est la composante de $f(t)$ qui correspond au régime ***propre*** (ou ***libre***) du circuit. $f_2(t)$ correspond au régime dit ***forcé***.

4.2. Réponse d'un circuit RLC à un échelon de tension

A titre d'exemple étudions la charge d'un condensateur dans un circuit RLC. Considérons le montage suivant, supposé initialement au repos :

A l'instant t = 0, nous basculons l'interrupteur.



L'équation de maille : $$e(t)=Ri(t)+L\frac{d\,i(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i\,dt \qquad (*)$$

Puisque nous cherchons $u(t)$, exprimons $i(t)$ en fonction de $u(t)$: $i(t)=C\dfrac{du}{dt}$

L'équation différentielle (*) devient alors :

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u(t)=e(t)=E_0$$

Cette équation est de la forme :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2\lambda}{\omega_0}\frac{du}{dt}+u(t)=E_0}$$

Avec $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}\quad et\quad \lambda=\dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

La solution générale de cette équation différentielle peut être calculée comme suit :

→ On écrit l'équation caractéristique de l'équation différentielle sans second membre :

$ar^2+br+c=0 \qquad \Rightarrow \qquad LC\,r^2+RC\,r+1=0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta=b^2-4ac=(RC)^2-4LC$

⇒si $\Delta>0 \quad (\lambda>1)$, le **régime sera amorti (apériodique)**. Alors l'équation caractéristique à deux racines réelles et l'expression de $u(t)$ est :

$$u(t)=E_0+Ae^{r_1 t}+Be^{r_2 t}$$

Avec : $\begin{cases} r_1=\omega_0\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\right)\\ r_2=\omega_0\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}\right)\end{cases}$

Les constantes A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales : à t=0, on a $u(0^-)=0\quad et\quad i(0)=0$.

D'où l'expression de la tension $u(t)$:

$$\boxed{u(t)=E_0+E_0\left(\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}}{2\sqrt{\lambda^2-1}}\right)e^{\left[\omega_0\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\right)\right]t}-E_0\left(\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}}{2\sqrt{\lambda^2-1}}\right)e^{\left[\omega_0\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}\right)\right]t}}$$

⇒si $\Delta<0 \quad (\lambda<1)$, le circuit fonctionne en **régime oscillatoire amorti (pseudo-périodique)** qui correspond à une allure sinusoïdale modulée par un terme exponentiel d'amortissement.

L'expression de la solution générale est :

$$u(t)=E_0+e^{-\lambda\omega_0 t}\left(A\cos\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\;t+B\sin\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\;t\right)$$

Avec : $\begin{cases} r_1=\omega_0\left(-\lambda+j\sqrt{1-\lambda^2}\right)\\ r_2=\omega_0\left(-\lambda-j\sqrt{1-\lambda^2}\right)\end{cases}$

Les constantes A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales : à t=0, on a $u(0^-)=0 \quad et \quad i(0)=0$. D'où l'expression de la tension :

$$\boxed{u(t) = E_0 - E_0 e^{-\lambda\omega_0 t}\left(\cos \omega_0 \sqrt{1-\lambda^2}\ t + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1-\lambda^2}\ t\right)}$$

$\Rightarrow$ si $\Delta = 0 \quad (\lambda = 1)$, le circuit fonctionne en **régime critique** qui est le cas limite entres les régimes apériodique et oscillatoire :

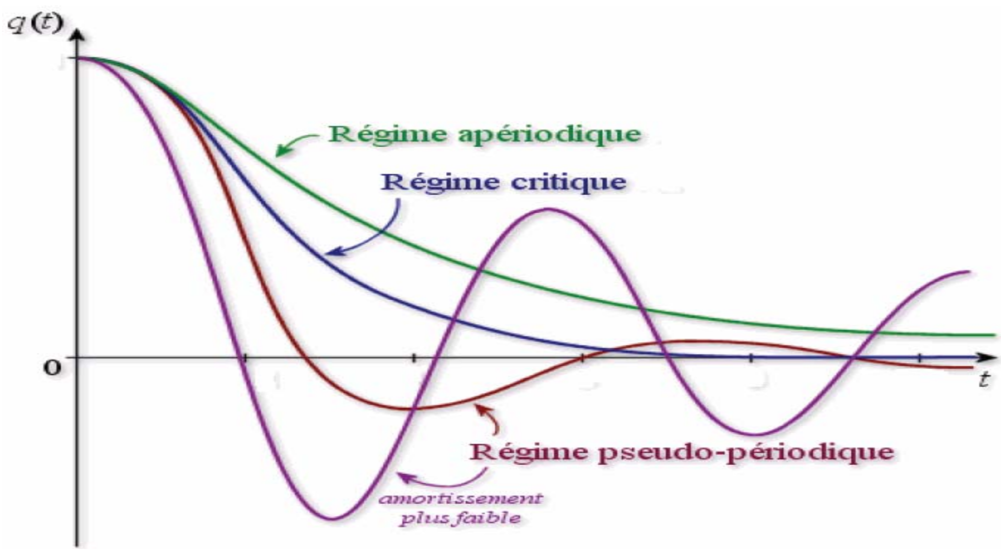
$$u(t) = E_0 + (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

Les constantes A et B se déterminent grâce aux conditions initiales $u(0^-)=0 \quad et \quad i(0)=0$.

Donc :

$$\boxed{u(t) = E_0 - E_0(\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}}$$

La courbe ci-contre donne l'évolution de la tension u (t) pour les différents régimes :



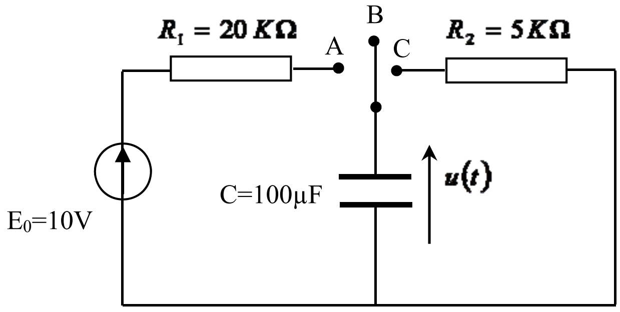
Exercices du chapitre 2

Exercice 1

Dans le circuit représenté sur la figure suivante, le commutateur se trouve initialement dans la position B et le condensateur est déchargé.

A l'instant $t = 0$, on bascule le commutateur dans la position A. Au bout de 10s, on le bascule sur la position C.

- Tracer l'évolution de la tension $u(t)$.

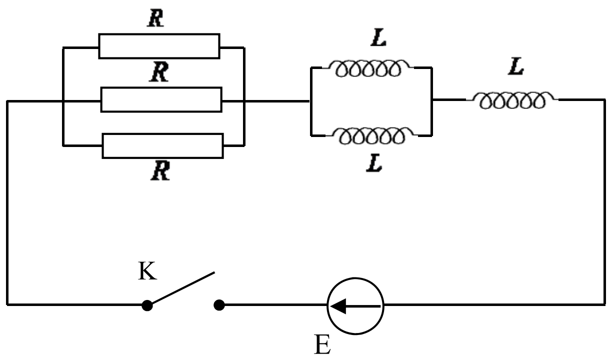


Exercice 2

A $t = 0$ on ferme l'interrupteur :

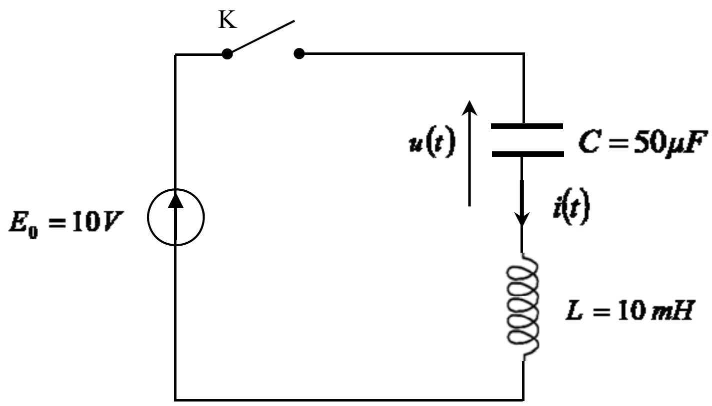
- Donner la loi de variation avec le temps de l'intensité du courant qui traverse le générateur.

On donne : $R = 6000\ \Omega$, $L = 30mH$, $E = 6V$.



Exercice 3

Dans le circuit de la figure ci-contre, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Déterminer les variations de $u(t)$. Le condensateur est initialement déchargé.



Chapitre 3

Réseaux électriques en régime sinusoïdal

Si l'on impose à un réseau une tension (ou un courant) sinusoïdale, on voit apparaitre, en plus du régime transitoire, une réponse sinusoïdale de même fréquence que la tension (ou le courant) appliquée. Quand le régime transitoire a disparu, cette réponse sinusoïdale subsiste : c'est le régime sinusoïdal permanent. Dans cette partie, nous étudions des circuits linéaires dans lesquels les signaux imposés par les générateurs sont sinusoïdaux.

1. Grandeurs sinusoïdales

Un signal est dit sinusoïdal s'il est de la forme :

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) = X\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)}$$

x_m : amplitude du signal.

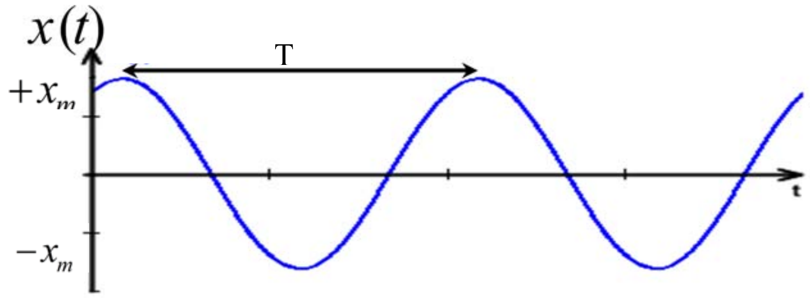
ω : pulsation du signale périodique et s'exprime en (rad/s).

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: période du signal ; $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$: fréquence du signal.

$\omega t + \varphi$: est la phase du signal et s'exprime en radians (rad),

φ : phase initiale du signal (à t = 0).

X : valeur efficace définie par : $X^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$; on obtient : $X = \frac{x_m}{\sqrt{2}}$.



2. Représentations des grandeurs sinusoïdales

2.1. Représentation vectorielle (Méthode de Fresnel)

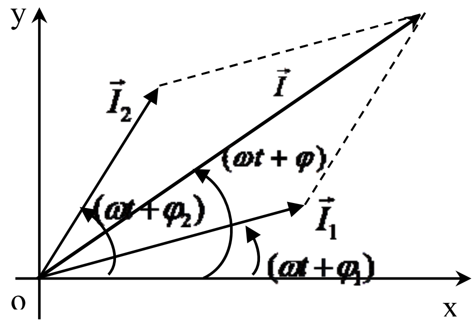
Cette méthode permet d'additionner des grandeurs instantanées sinusoïdales de même fréquence, mais d'amplitudes et de phases différentes.

- Considérons deux courants sinusoïdaux :

$$i_1(t) = I_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad \text{et} \qquad i_2(t) = I_{m2}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

La somme des deux courant est : $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

- Pour trouver $i(t)$, on peut procéder graphiquement :



➢ On considère un vecteur noté $\vec{I}_1$, de norme I_{m1}, tournant dans le plan **xOy** à une vitesse angulaire ω, et dont l'angle avec l'axe **Ox** à un instant t est égale à $\omega t + \varphi_1$. On définit de même un vecteur $\vec{I}_2$.

➢ Les projections sur Ox des vecteurs $\vec{I}_1$ et $\vec{I}_2$ sont égales respectivement aux courant i_1 et i_2.

La somme des deux courant $i(t)$ est la projection du vecteur somme :

$$\boxed{i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \quad et \quad \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \ ; \ tel\ que \quad \|\vec{I}\| = I_m}$$

2.2. Représentation complexe

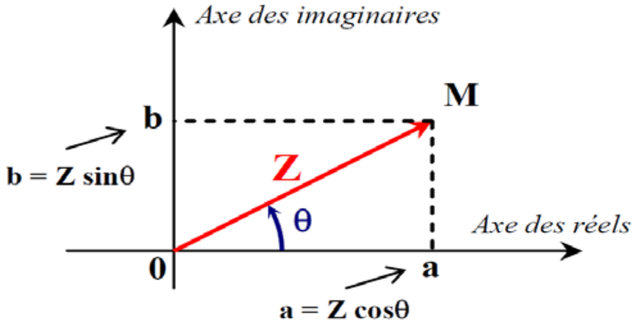
2.2.1. Rappels mathématiques

- Un nombre complexe peut se mettre sous la forme : $\boxed{Z = a + jb}$

On appelle : $a = \Re(Z)$ la partie réelle

et $b = \Im m(Z)$ la partie imaginaire

- On peut lui associer un vecteur $\vec{OM}$ dans le plan complexe : $Z = r\cos\theta + j\,r\sin\theta$



$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: module du nombre complexe

$\theta = \arg(Z) = \arctan\dfrac{b}{a}$: argument (angle) du nombre complexe

- On peut aussi l'écrire sous la forme exponentielle : $\boxed{Z = re^{j\theta}}$
- ou sous la forme polaire : $Z = [\, r\,;\ \theta\,] = r\angle\theta$

➢ cas particulier : $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

2.2.2. Application aux signaux sinusoïdaux

On associe à un signal sinusoïdal $x(t)$ une grandeur complexe temporelle $\underline{X}$:

$$\boxed{x(t) = x_m \cos\,(\omega\, t + \varphi) = \Re\,\left(\underline{X}\ e^{j\omega t}\right) \quad ; \quad \underline{X} = x_m\ e^{j\varphi} = X\sqrt{2}\ e^{j\varphi} = X\angle\varphi}$$

$$\boxed{x\,(t) \Leftrightarrow \underline{X}}$$

x_m : module de la grandeur complexe ($|\underline{X}|$) ;

φ : argument de la grandeur complexe ($\arg\underline{X}$) ;

$X = \frac{x_m}{\sqrt{2}}$: valeur efficace.

Remarque : On notera *x(t)* la valeur instantanée, X la valeur efficace et $\underline{X}$ la valeur complexe.

2.2.3. Dérivée et intégration

Soit la fonction $x(t) = x_m \cos\,(\omega t + \varphi)$, la dérivée s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = -x_m\,\omega \sin\,(\omega\, t + \varphi) = x_m\,\omega \cos\left(\omega\, t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

On lui associe l'amplitude complexe : $\omega\, x_m\, e^{j\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega\, x_m\, e^{j\,(\omega t + \varphi)} = j\omega\,\underline{X}\ e^{j\omega t}$

donc : $\boxed{\dfrac{dx}{dt} \Leftrightarrow j\omega\,\underline{X}}$

De même on démontre que intégrer revient à diviser par $j\omega$: $\boxed{\int x\, dt \Leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega}\,\underline{X}}$

3. Modèle complexe d'un circuit en régime sinusoïdal

Dans un circuit en régime sinusoïdal, on peut écrire :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t = \Re\left(\underline{E}\, e^{j\,\omega\, t}\right) \;;\; \underline{E} = E_0$$

la source de tension e(t) est remplacée par sa forme complexe notée $\underline{E}$:

$$\boxed{e(t) \;\Leftrightarrow\; \underline{E} = E_0}$$

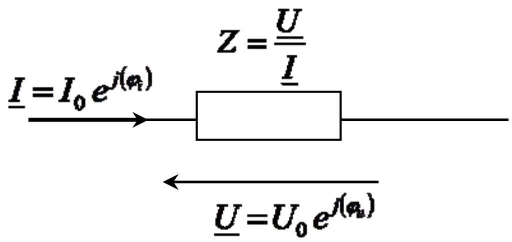
Dans le modèle complexe, tout dipôle linéaire possède une ***impédance complexe :*** $\boxed{\underline{Z} = R + jX}$

où R : représente la résistance du dipôle

X : la réactance

3.1. Impédances complexes des dipôles élémentaires

L'impédance complexe Z est définit pour un dipôle linéaire comme étant égale au rapport de la valeur complexe de la tension $\underline{U}$ sur la valeur complexe du courant $\underline{I}$: $\boxed{Z = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$



3.1.1. Impédance d'une résistance

nous avons : $u(t) = R\, i(t)$

En passant aux amplitudes complexes, nous obtenons alors : $\boxed{\underline{U} = R\,\underline{I}}$

Dans le cas d'une résistance, l'impédance complexe est égale à R : $\boxed{Z_R = R}$

3.1.2. Impédance d'une bobine idéale

La relation entre courant et tension aux bornes d'une bobine d'inductance L est : $u(t) = L\frac{d\,i(t)}{d\,t}$

Cette relation temporelle se traduit en termes d'amplitudes complexes par : $\boxed{\underline{U} = jL\omega\,\underline{I}}$

La définition de l'impédance complexe d'un dipôle linéaire nous permet alors de poser : $\boxed{Z_L = jL\omega}$

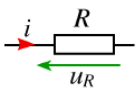
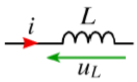
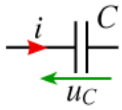
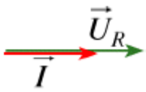
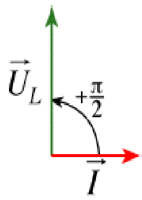
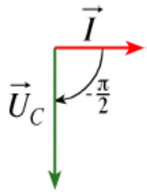
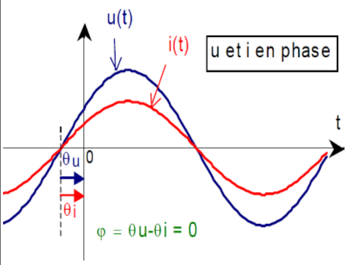
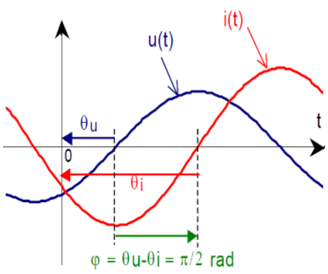
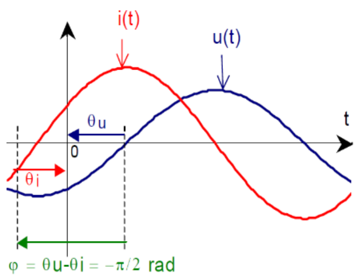
3.1.3. Impédance d'un condensateur

La relation entre courant et tension aux bornes d'un condensateur idéal de capacité C est : $u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$. Nous déduisons : $\boxed{\underline{U} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}}$.

L'expression de l'impédance du condensateur s'écrit : $\boxed{Z_C = \dfrac{1}{jC\omega}}$

3.2. Lois en régime sinusoïdal

Toutes les lois vues en régime continu sont applicables aux régimes sinusoïdaux à condition de les appliquer aux valeurs instantanées ou aux valeurs complexes.

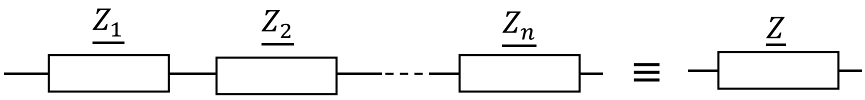
	Résistance R	**Inductance L**	**Capacité C**
Schéma			
Equation fondamentale	$u_R(t) = R\,i(t)$	$u_L(t) = L\dfrac{d\,i(t)}{d\,t}$	$u_C(t) = \dfrac{1}{C}\int i(t)dt$
Equation complexe	$\underline{U_R} = R\,\underline{I}$	$\underline{U_L} = jL\omega\,\underline{I}$	$\underline{U_C} = \dfrac{1}{jC\omega}\underline{I}$
Impédance Z (Ω)	$Z_R = R$	$Z_L = jL\omega$	$Z_C = \dfrac{-j}{C\omega}$
Admittance Y (S)	$Y_R = \dfrac{1}{R}$	$Y_L = -\dfrac{j}{L\omega}$	$Y_C = jC\omega$
Déphasage $\varphi(rad) = \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = \dfrac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\dfrac{\pi}{2}$
Représentation de Fresnel	 Le courant est en phase avec la tension	 Le courant est en retard de $\pi/2$ sur la tension	 Le courant est en avance de $\pi/2$ sur la tension
Relations de phase			

3.3. Groupement de dipôles passifs

Soit un groupement de dipôles passifs, d'impédance complexe $\underline{Z}_i$ et d'admittance complexe $\underline{Y}_i = \dfrac{1}{\underline{Z}_i}$

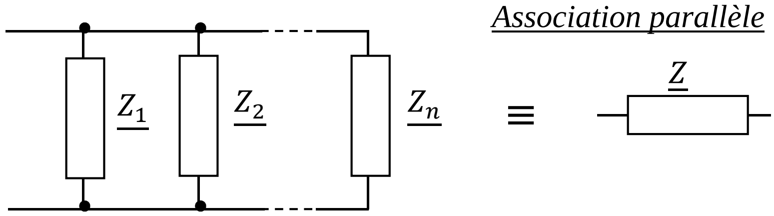
l'impédance équivalente est :

Association série



$$\boxed{\underline{\boldsymbol{Z}} = \sum_{i-1}^{n} \underline{\boldsymbol{Z_i}}}$$

Association parallèle

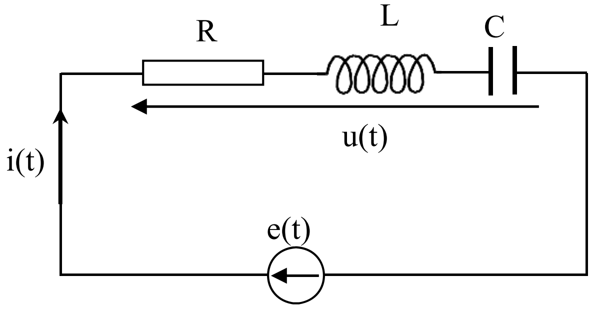


$$\boxed{\underline{\boldsymbol{Y}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\boldsymbol{Y_i}}}$$

Ce qui était vrai pour l'association des résistances reste applicable à l'association des impédances.

3.4. Etude d'un circuit RLC série

On associe en série un générateur sinusoïdal délivrant une tension e(t), un conducteur ohmique de résistance R, une bobine parfaite d'inductance L et un condensateur de capacité C.



Avec $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$

$i(t) = I\sqrt{2}\cos\omega t$

$u_R = Ri \;\; ; \;\; u_L = L\dfrac{di}{dt} \;\; ; \;\; u_C = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$

Loi des mailles : $u(t) = u_R + u_L + u_C = e(t)$

on obtient l'équation : $e = Ri + L\,\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\int i\,dt$

On remplace i(t) et e(t) par leur notation complexe :

$$\underline{E} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + \frac{\underline{I}}{jC\omega} = \left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)\underline{I} \qquad \text{donc on a :} \quad \underline{E} = \underline{Z}\,\underline{I}$$

On retrouve l'impédance : $\boxed{\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$ et son module : $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Et l'argument : $\boxed{\varphi = \arctan\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}}$

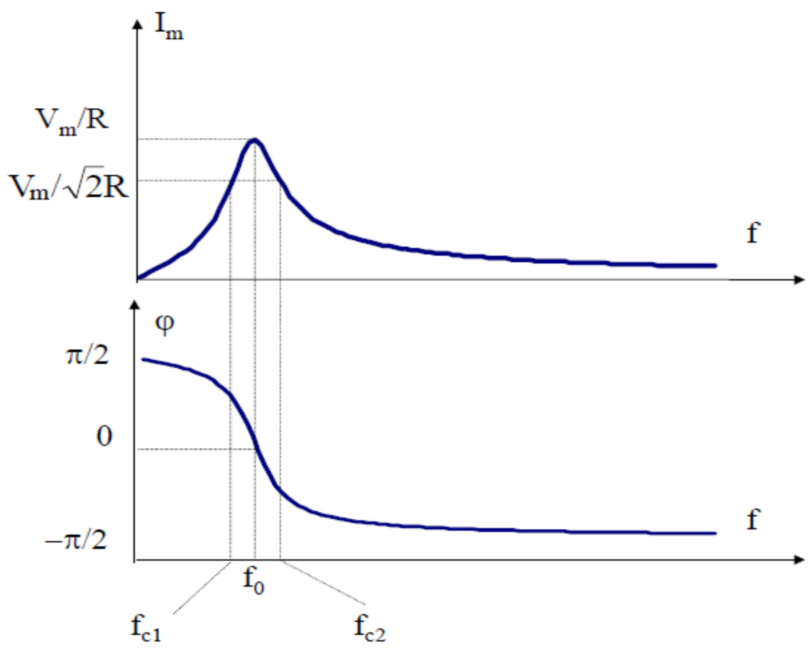
Résonance en intensité

Dans un circuit RLC série lorsque le générateur impose une pulsation $\omega = \omega_0$ (la pulsation propre) le circuit entre en résonance d'intensité, l'intensité du courant est alors maximale :

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}}$$

$\underline{I}$ est maximal, lorsque le dénominateur est minimal : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$. Donc on aura :

- Pulsation propre ω_0 : $\boxed{LC\omega_0^2 = 1 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$
- Fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
- L'impédance du circuit est minimale et réelle : $Z = R$
- Le déphasage est nul : $\varphi = 0$



- Bande passante : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$; ω_1 et ω_2 sont valeurs de ω pour lesquelles $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

  La largeur de cette bande passante vaut : $\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}$

- on exprime l'acuité à la résonance à l'aide du facteur de qualité du circuit Q :

$$\boxed{Q = \frac{L\omega_O}{R} = \frac{1}{RC\omega_O} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

plus le facteur de qualité est grand et plus la résonance est aigue.

3.5. Puissance

3.5.1. Puissance instantanée

Soit : $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ la tension aux bornes d'un dipôle ;

$i(t) = I\sqrt{2}\cos\omega t$ l'intensité du courant qui la traverse.

La puissance reçu par ce dipôle est définie par : $p(t) = u(t) \times i(t)$

$$\boxed{p(t) = 2U\ I\cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi) = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \varphi)}$$

On note que la puissance est une fonction périodique de période T/2 par rapport à u(t) et i(t).

3.5.2. Puissance moyenne

La puissance moyenne P est définie par : $\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = UI\cos\varphi}$

La puissance est aussi appelée puissance active en régime sinusoïdal.

La bobine parfaite $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ et le condensateur $\left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$ ne consomment pas de puissance active donc pas d'énergie.

Exercices du chapitre 3

Exercice 1

Soit une tension sinusoïdale de valeur efficace U=15 V et de période T=1 ms.

1- Calculer sa valeur maximale, sa fréquence et sa pulsation.

2- Exprimer la tension instantanée en fonction du temps. Cette tension vaut 10 V à l'instant initial.

3- Déterminer l'amplitude complexe de cette tension.

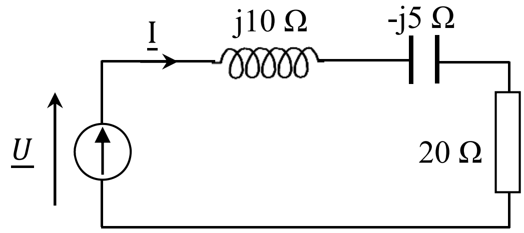
Exercice 2

Déterminer par la méthode complexe, la somme des trois tensions définies par leurs valeurs effectives et leurs phases initiales : $U_1\ (55\,V,\, 90°)$; $U_2\ (75\,V,\, 45°)$; $U_3\ (100\,V,\, 0°)$.

Exercice 3

On considère le circuit représenté ci-dessous où $\underline{U}$ est la représentation complexe d'une tension sinusoïdale de valeur efficace $U_{eff} = 100V$ et de fréquence 50 Hz.

Les composants de ce circuit sont directement caractérisés par la valeur de leur impédance complexe.



1. Calculer la valeur maximal I_m du courant $\underline{I}$;
2. Calculer la phase du courant $\underline{I}$ si on considère la tension $\underline{U}$ à l'origine des phases. Ecrire alors l'expression temporelle du courant $i(t)$ et de la tension $u(t)$.

Exercice 4

Un **dipôle 1** est constitué par la mise en série d'un conducteur ohmique de résistance R_1=100Ω et d'une bobine parfaite d'inductance L=0.5H. Le **dipôle 2** est constitué par la mise en série d'un conducteur ohmique de résistance R_2=150Ω et d'un condensateur de capacité C=15µF.

I- On branche ces deux dipôles en série sous une tension effective de 24V et de fréquence 50Hz

1- Exprimer l'impédance de chaque dipôle sous la forme $\underline{z} = a + jb$.

2- Exprimer l'impédance $\underline{Z}$ de l'association série des deux dipôles

3- Déterminer la valeur i(t) puis la tension aux bornes de chaque dipôle

II- On branche ces deux dipôles en parallèle sous une tension effective de 24V et de fréquence 50Hz

1- Exprimer l'impédance $\underline{Z}$ de l'association parallèle

2- Déterminer la valeur de l'intensité du courant traversant chaque dipôle ainsi que l'intensité du courant total.