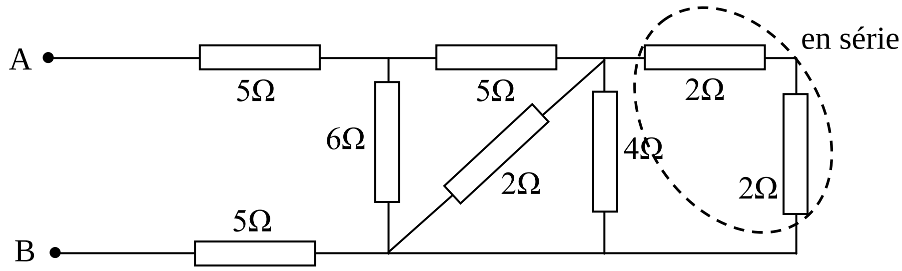
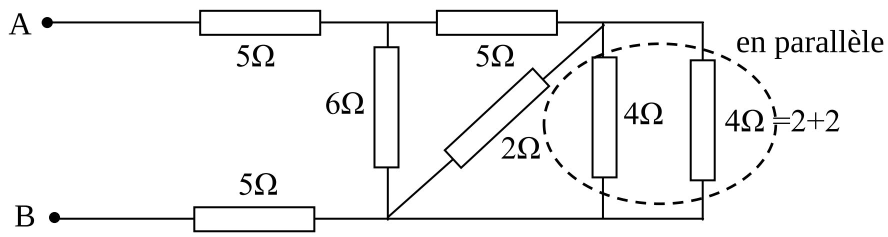
Solutions des Exercices

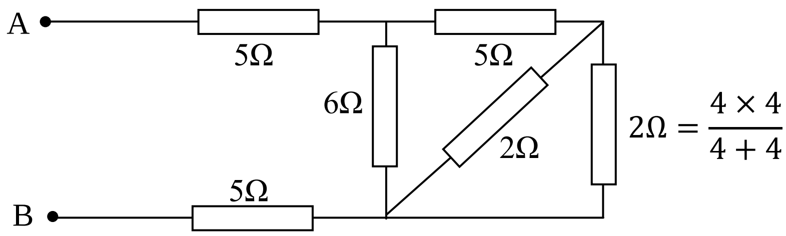
Chapitre 1 : Réseaux électriques en régime continu

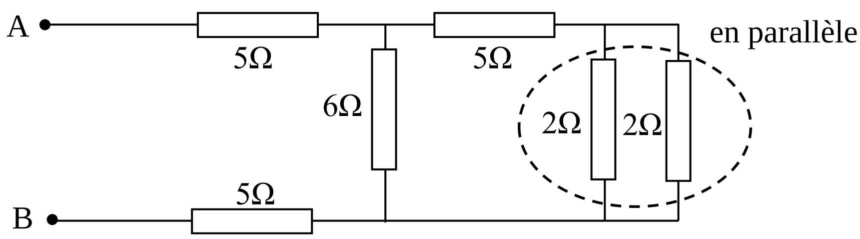
Exercice 1

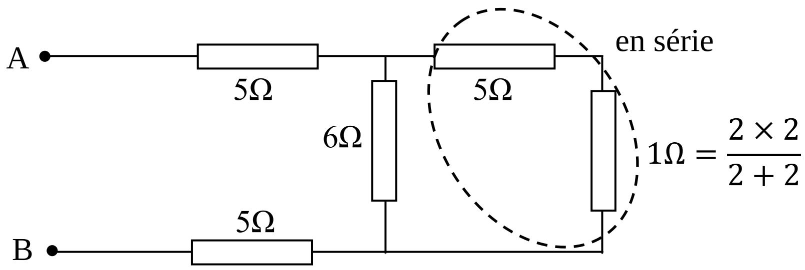
Calculer la résistance équivalente vue des points A et B pour le réseau suivant :

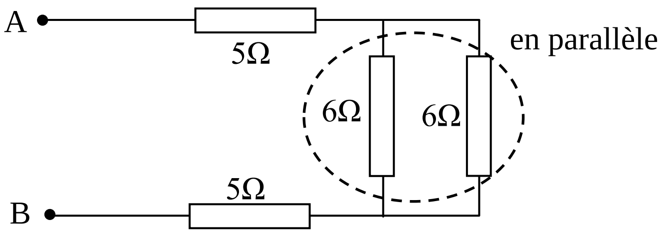


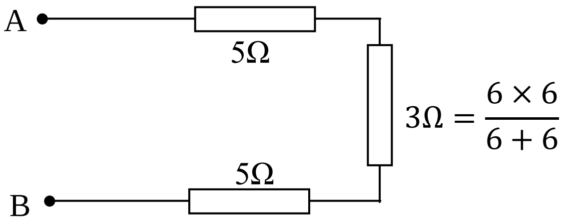


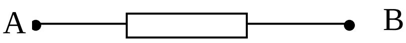








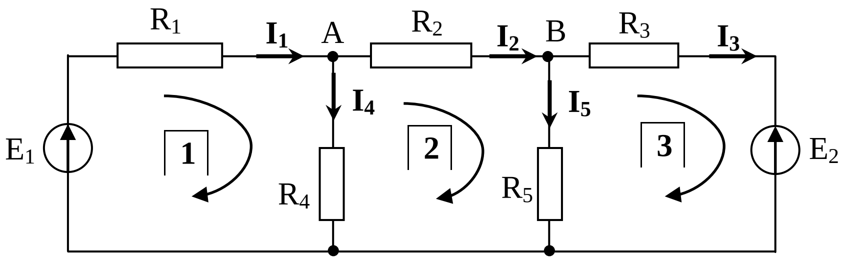




$\boxed{R_{AB} = 5+3+5 = 13\ \Omega}$

<u>Exercice 2</u>

<u>Déterminer les intensités ***I₁, I₂, I₃, I₄*** et ***I₅*** dans chaque branche du réseau suivant :</u>



on va utiliser les lois de Kirchhoff :

- Loi des nœuds : $\begin{cases} noeud\ A: \ I_1 = I_2 + I_4 \\ noeud\ B: \ I_2 = I_5 + I_3 \end{cases}$

- Loi des mailles : $\begin{cases} maille\ 1: \quad R_1I_1 + R_4I_4 - E_1 = 0 \\ maille\ 2: \quad R_2I_2 + R_5I_5 - R_4I_4 = 0 \\ maille\ 3: \quad R_3I_3 + E_2 - R_5I_5 = 0 \end{cases}$

D'après le 1er système d'équation on a : $\begin{cases} I_4 = I_1 - I_2 \\ I_5 = I_2 - I_3 \end{cases}$

On remplace ces deux valeurs dans le 2ème système d'équation on aura donc :

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_4\,(I_1 - I_2) = E_1 \\ R_2 I_2 + R_5\,(I_2 - I_3) - R_4\,(I_1 - I_2) = 0 \\ R_3 I_3 - R_5\,(I_2 - I_3) = -\,E_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (R_1 + R_4)\,I_1 - \,R_4 I_2 = E_1 \\ -R_4\,I_1 + (R_2 + R_5 + R_4)\,\,I_2 - R_5 I_3 = 0 \\ -R_5\,I_2 + (R_3 + \,R_5) I_3 = -\,E_2 \end{cases}$$

Ce système d'équation peut être résolu en utilisant le calcul matriciel (méthode de Cramer) :

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_4) & -R_4 & 0 \\ -R_4 & (R_2 + R_5 + R_4) & -R_5 \\ 0 & -R_5 & (R_3 + R_5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \\ -E_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\,.\,10^3 & -2\,.\,10^3 & 0 \\ -2\,.\,10^3 & 5\,.\,10^3 & -2\,.\,10^3 \\ 0 & -2\,.\,10^3 & 3\,.\,10^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

On calcule le Déterminant Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3\,.\,10^3 & -2\,.\,10^3 & 0 \\ -2\,.\,10^3 & 5\,.\,10^3 & -2\,.\,10^3 \\ 0 & -2\,.\,10^3 & 3\,.\,10^3 \end{vmatrix} = 45\ \times 10^9$$

Les intensités des courants sont calculées comme suit :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{10} & -2\,.\,10^3 & 0 \\ \mathbf{0} & 5\,.\,10^3 & -2\,.\,10^3 \\ \mathbf{-20} & -2\,.\,10^3 & 3\,.\,10^3 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0.66\,mA$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3\,.\,10^3 & \mathbf{10} & 0 \\ -2\,.\,10^3 & \mathbf{0} & -2\,.\,10^3 \\ 0 & \mathbf{-20} & 3\,.\,10^3 \end{vmatrix}}{\Delta} = -1.33\,mA$$

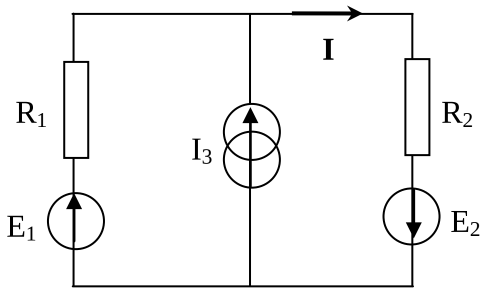
$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3\,.\,10^3 & -2\,.\,10^3 & \mathbf{10} \\ -2\,.\,10^3 & 5\,.\,10^3 & \mathbf{0} \\ 0 & -2\,.\,10^3 & \mathbf{-20} \end{vmatrix}}{\Delta} = -7.55\,mA$$

On déduit les courants I_4 et I_5 :

$$I_4 = I_1 - I_2 = 2\,mA \qquad et \qquad I_5 = \,I_2 - I_3 = 6.22\,mA$$

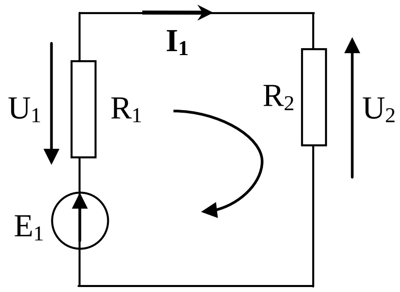
Exercice 3

Déterminer le courant ***I*** circulant dans la résistance R_2 en appliquant le principe de superposition.



➢ Les deux sources E_2 et I_3 sont passivés :

D'après la loi des mailles :



$$E_1 - U_1 - U_2 = 0$$

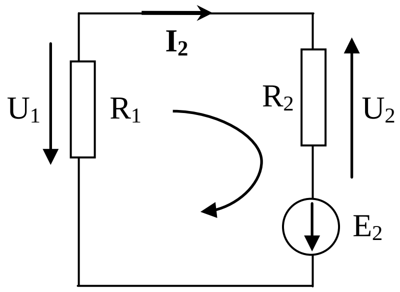
$$\Longrightarrow \quad E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad E_1 = (R_1 + R_2) I_1$$

$$\boxed{I_1 = \frac{E_1}{(R_1 + R_2)}}$$

➢ Les deux sources E_1 et I_3 sont passivés :

D'après la loi des mailles :



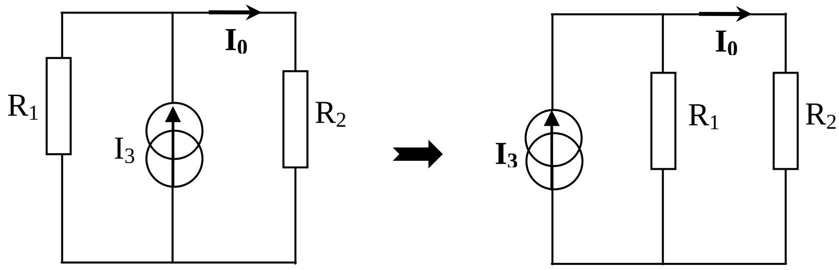
$$E_2 = U_1 + U_2 = R_1 I_2 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I_2$$

$$\boxed{I_2 = \frac{E_2}{(R_1 + R_2)}}$$

➢ Les deux sources de tensions E_1 et E_2 sont passivés :

D'après le principe du pont diviseur de courant :

$$\boxed{I_0 = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} I_3}$$



➢ Enfin le courant circulant dans la résistance R_2 est la somme des trois courants :

$$I = I_1 + I_2 + I_0 = \frac{E_1}{(R_1 + R_2)} + \frac{E_2}{(R_1 + R_2)} + \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} I_3$$

$$\boxed{I = \frac{(E_1 + E_2 + R_1 I_3)}{(R_1 + R_2)}}$$

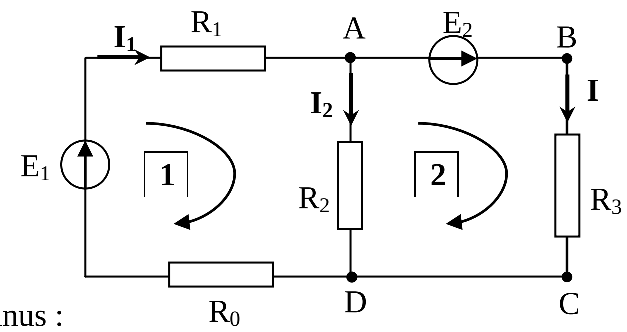
<u>Application Numérique :</u>

$$I = \frac{(10+20+(10\times 0.1))}{(10+5)} = 2.067\ A$$

Exercice 4

Déterminer l'intensité du courant ***I*** circulant à travers la résistance R_3, en utilisant :

1. Lois de Kirchhoff :



- Nœud A : $I_1 = I_2 + I$
- Loi des mailles:

maille 1: $E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_0 I_1 = 0$

maille 2 : $E_2 - R_3 I + R_2 I_2 = 0$

on a un système à trois équations pour trois inconnus :

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I = 0 \\ (R_1 + R_0)I_1 + R_2 I_2 = E_1 \\ R_2 I_2 - R_3 I = -E_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ (R_1+R_0) & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \\ -E_2 \end{pmatrix}$$

On peut facilement calculer le courant I circulant dans la branche BC :

Déterminant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ (R_1+R_0) & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -R_2R_3 - R_3(R_1+R_0) - (R_1+R_0)R_2$

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ (R_1+R_0) & R_2 & E_1 \\ 0 & R_2 & -E_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-R_2E_2 - R_2E_1 - (R_1+R_0)E_2}{\Delta}$$

$$\boxed{I = \frac{R_2E_1 + (R_0+R_1+R_2)E_2}{R_2(R_0+R_1) + R_3(R_0+R_1+R_2)}}$$

Application Numérique :

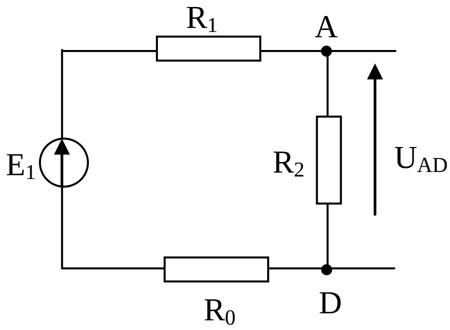
$$I = \frac{20 \times 20 + (10+10+20)10}{20(10+10) + 10(10+10+20)} = 1A$$

$$\boxed{I = 1\ A}$$

2. Théorème de Thévenin :

- Pour appliquer le théorème de Thévenin, on décompose le réseau en cherchant d'abord le modèle équivalent vu des bornes A et D :

on détermine U_{AD} en utilisant le pont diviseur de tension :



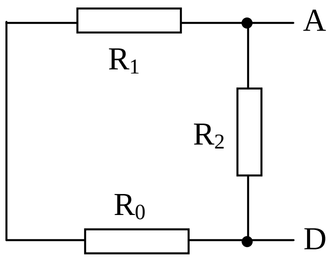
$$U_{AD} = \frac{R_2}{R_0 + R_1 + R_2} E_1$$

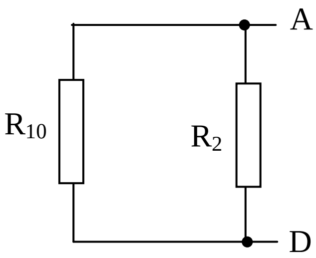
Application numérique :

$$U_{AD} = \frac{20}{10 + 10 + 20} 20 = 10\ V$$

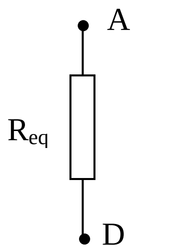
➢ La résistance équivalente vue des bornes A et D s'obtient en remplaçant le générateur E_1 par un fil :

R_1 et R_0 sont groupées en série R_{10} et R_2 sont groupées en parallèle





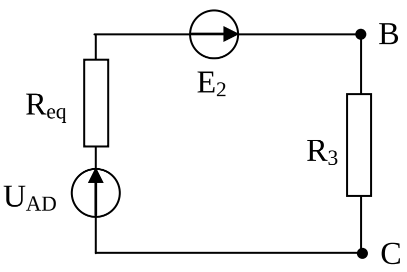
$R_{10} = R_1 + R_0$



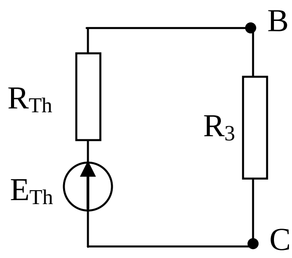
$$\boxed{R_{eq} = \frac{R_2\, R_{10}}{R_2 + R_{10}}}$$

Application numérique : $R_{eq} = 10\ \Omega$

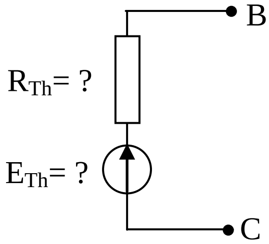
➢ On remplace dans le montage initiale la partie vue des bornes B et C et on applique le modèle de Thévenin :



⇔

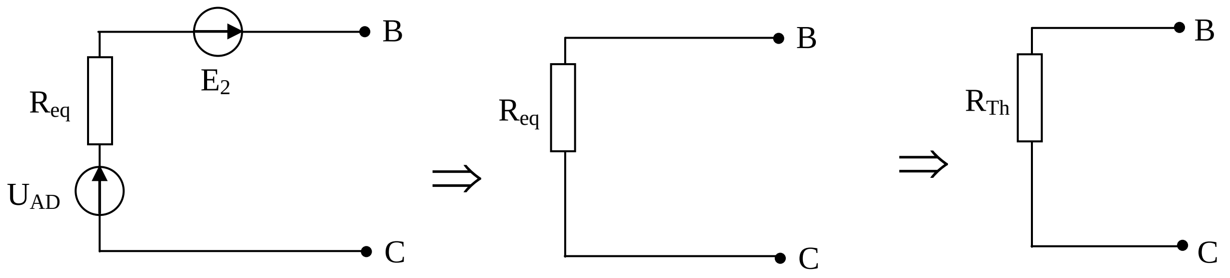


Calcul de la résistance et le générateur de Thévenin ?



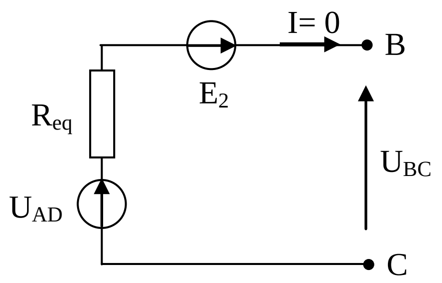
- Résistance de Thévenin R_{Th} :

On remplace E_2 et U_{AD} par des fils :



On conclue que : $\boxed{R_{Th} = R_{eq}}$

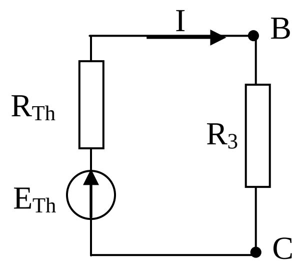
- Générateur de Thévenin E_{Th} :



On obtient E_{Th} en calculant la tension entre les bornes B et C en circuit ouvert :

$$\boxed{E_{Th} = U_{BC} = U_{AD} + E_2}$$

- Enfin, le courant circulant à travers R_3 vaut :



$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{I = \frac{U_{AD} + E_2}{R_{eq} + R_3}}$$

Application numérique :

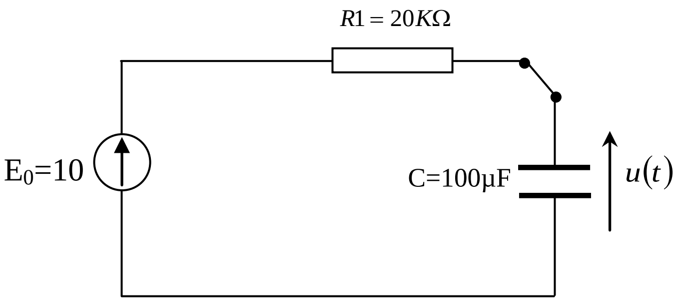
$$\boxed{I = \frac{10 + 10}{10 + 10} = 1A}$$

Chapitre 2 : Réseaux électriques en régime transitoire

Exercice 1

Tracer l'évolution de la tension $u(t)$:

→ A partir de l'instant t=0 , le commutateur reste dans la position A, le circuit équivalent est représenté sur la figure suivante :



Ce circuit est exactement le même que celui étudié au cours. On peut donc immédiatement écrire :

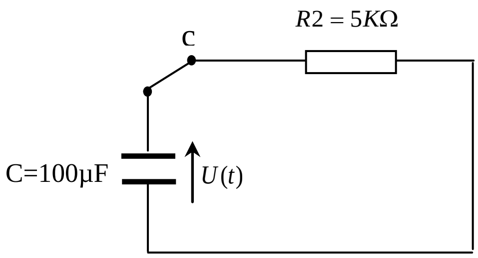
$$\boxed{u(t) = E_0\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)}$$

Avec : $\tau_1 = R_1C = 20.10^{+3}.100.10^{-6} = 2s$

Donc : $\boxed{u(t) = 10\left(1 - e^{-t/2}\right)}$

- Ce circuit classique correspond à la charge d'un condensateur au travers d'une résistance.

$\longrightarrow$ A t=10 s, on bascule le commutateur dans la position C. Notre circuit correspond à celui représenté sur la figure ci-dessous.



Nous pouvons considérer l'instant t=10 s

Comme notre nouvelle origine des temps.

$$U_1 = U(t = 10s) = 10\left(1 - e^{-\frac{10}{2}}\right) = 9.93\ V$$

- On peut considérer qu'au moment du basculement du commutateur sur C, on a en fait $U_1 = E_0 = 10\ V$, c-à-d que le circuit aura atteint son régime permanent.

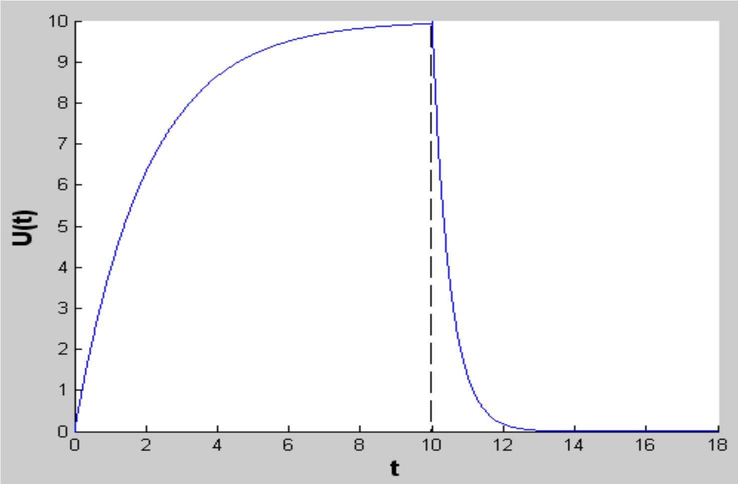
  D'après le schéma de la figure (voir le cours) ; on tire :

$$U(t) = E_0\left(e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$

Avec : $\tau_2 = R_2C = 5.10^{+3}.100.10^{-6} = 0.5\ s$

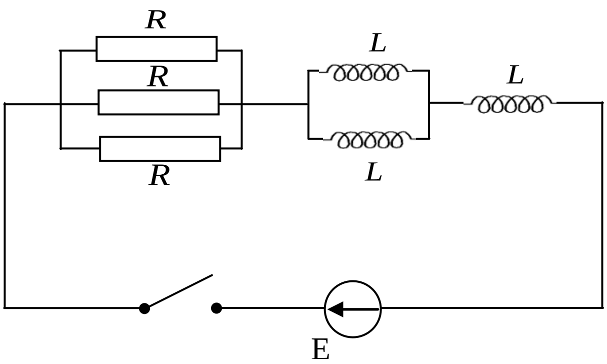
$$\longrightarrow U(t) = 10\left(e^{-\frac{t}{0.5}}\right) \longrightarrow \boxed{U(t) = 10e^{-2t}}$$

Traçons l'évolution de $U(t)$ depuis le basculement initiale du commutateur sur A.



Exercice 2

Donner la loi de variation avec le temps de l'intensité du courant i(t)



- On doit premièrement simplifier le circuit :

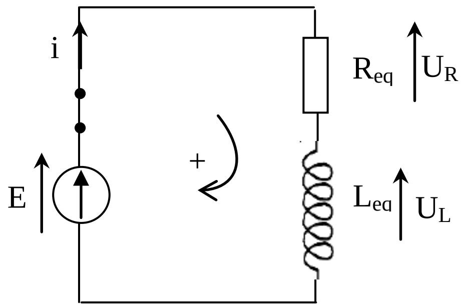
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R} \quad \rightarrow \quad R_{eq} = \frac{R}{3} = \frac{6000}{3} = 2000\ \Omega$$

$$L_{eq} = L + L_{eq1} \quad , L_{eq1} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L} \quad \rightarrow \quad L_{eq1} = \frac{L}{2}$$

$$\rightarrow\ L_{eq} = L + \frac{L}{2} = \frac{3}{2}L = \frac{3}{2} \times 30\ mH = 45mH$$

- Le nouveau circuit équivalent est :

→ à t=0, on ferme l'interrupteur :



D'après la loi les maille :

$E - U_R - U_L = 0$

$U_R + U_L = E$

Tel que : $\begin{cases} U_R = R_{eq} i \\ U_L = L_{eq} \frac{di}{dt} \end{cases}$

Donc on aura : $\boxed{L_{eq} \frac{di}{dt} + R_{eq} i = E}$ $(*)$

→ Équation différentielle de premier ordre avec second membre et qui admet une solution générale : $i = i_1 + i_2$

$\begin{cases} i_1 \text{ : solution homogéne} \\ i_2 \text{ : solution particulière} \end{cases}$

- <u>Solution homogène</u> : solution de l'équation différentielle sans second membre.

$\rightarrow (*) \leftrightarrow L_{eq} \frac{di}{dt} + R_{eq} i = 0 \quad \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{-R_{eq} i}{Leq} \quad \rightarrow \quad \frac{di}{i} = -\frac{R_{eq}}{L_{eq}}$

$\rightarrow \int \frac{di}{i} = -\frac{R_{eq}}{L_{eq}} \int dt \rightarrow \ln i = -\frac{R_{eq} t}{L_{eq}} + cst \rightarrow i_{1(t)} = e^{-\frac{R_{eq}}{L_{eq}} t + cst}$

$\rightarrow i_1(t) = K\, e^{-\frac{R_{eq}}{L_{eq}} t}$ *ou bien* : $\boxed{i_1(t) = k\, e^{\frac{-t}{\tau}} / \tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}}}$

- <u>Solution particulière :</u>

à $t \rightarrow \infty$, c-à-d en régime permanent (continu), le courant est constant : $i = cst$

donc la tension entre les bornes de la bobine : $\boxed{U_{L=} L_{eq} \frac{di}{dt}} = 0$

On aura : $U_R + U_L = E \rightarrow U_R = E \rightarrow R_{eq} i = E \rightarrow i_1 = \frac{E}{R_{eq}}$

- <u>Solution générale</u> : $i(t) = i_1 + i_2$

$\rightarrow i(t) = k\, e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{E}{R_{eq}}$

- Détermination de la constant K se fera è l'aide des conditions initiales :

à l'instant $= 0$, l'intensité du courant est nulle, donc

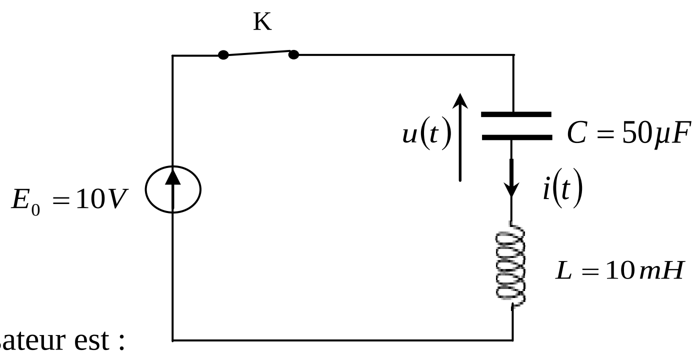
$$i(t=0) = 0 \rightarrow ke^0 + \frac{E}{R_{eq}} = 0 \rightarrow k = \frac{-E}{R_{eq}}$$

Enfin : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R_{eq}}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \quad avec\ :\ \tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}}}$

Application Numérique : $\frac{E}{R_{eq}} = \frac{6}{2000} = 3 \times 10^{-3}\ ; \tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{45\times10^{-3}}{2\times10^{3}} = 22{,}5 \times 10^{-6}$

$$\boxed{i(t) = 3 \times 10^{-3}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \quad ; \quad \tau = 22{,}5 \times 10^{-6}\ s}$$

Exercice 3



Déterminer les variations de $U(t)$:

- La tention aux bornes de la bobine

est égale à : $U_L = \frac{Ldi}{dt}$

Par ailleurs , la tension au bornes des condeusateur est :

$$U(t) = \frac{1}{c}\int i(t).dt$$

Soit $i(t) = c\frac{du}{dt}$

⟶ La loi des mailles dans le circuit, après fermeture de l'interrupteur nous donne donc :

$$E_0 = U_L + U(t) = L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\ dt$$

Soit, en exprimant $i(t)$ en fonction de $U(t)$:

$$\boxed{E_{0=}LC\ \frac{d^2U}{dt^2} + U(t)} \qquad (1)$$

⟶ Equation différentielle du deuxième (second) ordre avec second membre. On peut l'écrire sous la forme suivant :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{2\lambda}{\omega_0}\frac{du}{dt}+u(t)=k} \quad (2)$$

Tel que $\begin{cases} \omega_0 & \text{: pulsation propre du circuit} \\ \lambda & \text{: facteur d'amortissement} \end{cases}$

En comparant les deux équations (1) et (2), on trouve :

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\lambda = 0$, $k = E_0$

Donc : (1) $\leftrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2U}{dt^2}+u(t)=E_0}$

Puisque $\lambda = 0$, on écrit directement l'expression de la solution :

$$\boxed{u(t)=k+A\cos\omega_0 t \leftrightarrow u(t)=E_0+A\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}$$

- Pour déterminer A , on utilise les conditions initiales :

à l'instant $t = 0$, le condensateur n'est pas chargé. La tension à ses bornes est donc nulle :

$u(t=0) = E_0 + A = 0 \rightarrow A = -E_0$

D'où : $\boxed{u(t)=E_0\left(1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right)}$

Chapitre 3 : Réseaux électriques en régime Sinusoïdal

Exercice 1

$\begin{cases} U_{eff} = 15V & \text{: valeur efficace de la tension} \\ T = 1\text{ ms} & \text{: période} \end{cases}$

1- Calculer la valeur maximale de la tension, la fréquence et la pulsation :

* $u_{max} = U_m = U_{eff}\sqrt{2} = 15\times\sqrt{2} \cong 21.2\,V$

* $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3\,Hz$

* $\omega = 2\pi f = 2\pi.10^3 = 2000\pi \cong 6283\,rad.s^{-1}$

2- Exprimer la tension instantanée :

La valeur instantanée de la tension s'écrit sous la forme suivante :

$u(t) = U_m cos(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \varphi = ?$

A l'instant t = 0, $u = 10\ V$; donc :

$u\ (t = 0) = U_m\ cos(\omega(0) + \varphi) = 10$

$\rightarrow \quad U_m cos\ \varphi = 10$

$\rightarrow \quad cos\ \varphi = \frac{10}{U_m} = \frac{10}{21.2} \cong 0.4717$

$\rightarrow \quad \varphi = arccos(0.4717) \cong 1.08\ rad$

enfin : $\boxed{u\ (t) = 21.2\ cos(2000\ \pi t + 1.08)}$

3- L'amplitude complexe de cette tension :

$u\ (t) \Longleftrightarrow \underline{U} = U_{eff}\sqrt{2}\ e^{j(\omega t+\varphi)}$

$$\boxed{\underline{U} = 21.2\ e^{j(2000\pi t+1.08)}}$$

Exercice 2

- Calculer la somme des trois tensions :

$U_1(55V\ , 90°) \quad ; \quad U_2(75V\ , 45°) \quad ; \quad U_3(100V\ , 0°)$

$\Rightarrow$ Chaque tension peut être écrite sous la forme instantanée :

$$u\ (t) = U_m cos(\omega(0) + \varphi)$$

$\Rightarrow$ Elle peut être associée à un nombre complexe :

$$\underline{U} = U_m e^{j(\omega t+\varphi)} = U_m[cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)]$$

$\Rightarrow$ Pour faciliter les calculs, on réduit l'expression du nombre complexe

$\boxed{\underline{U} = U_m e^{j\varphi} = U_m(cos\ \varphi + j\sin\varphi)}$ / (ωt) est toujours constante (même fréquence).

$U_1(55\ V\ , 90°) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U_1} = 55\ e^{j(\pi/2)} = 55\left(cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = 55j$

$U_2(75\ V\ , 45°) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U_2} = 75\ e^{j(\pi/4)} = 75\left(cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = 75\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 75\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$

$U_3\ (100\ V\ , 0°) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U_3} = 100\ e^{j(0)} = 100(\cos 0 + j\sin 0) = 100$

la somme des tensions :

$$\underline{U}_{tot} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = \left(100 + \frac{75\sqrt{2}}{2}\right) + j\left(55 + \frac{75\sqrt{2}}{2}\right) = 153.03 + j\,108.03$$
$$= U_m\, e^{j\varphi} = \left|\underline{U}_{tot}\right|\, e^{j\,(\arg U_{tot})}$$

le module du nombre complexe : $\left|\underline{U}_{tot}\right| = \sqrt{(153.03)^2 + (108.03)^2} = 187.32$

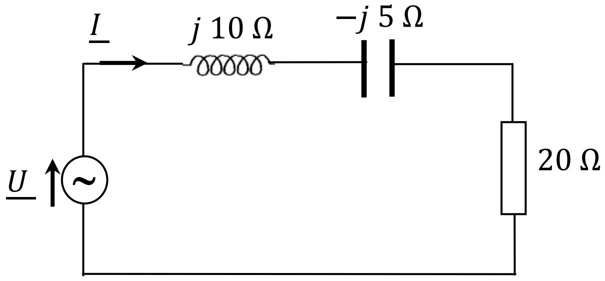
l'argument est obtenu par la relation : $\varphi = arctg\left(\frac{108.03}{153.03}\right) = 0.615\, rad$

enfin, on peut en déduire la valeur instantanée de la sommes des tension :

$$\boxed{u_{tot}(t) = U_m cos(\omega t + \varphi) = 187.32\, cos(\omega t + 0.615)}$$

Exercice 3

Les composants de ce circuit sont directement caractérisés par leurs valeurs complexes.



1- Calculer la valeur maximale I_m du courant I :

* on calcule tout d'abord l'impédance complexe équivalente Z_{eq} :

$Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_c = 20 + j10 - j5 = 20 + j5$

* on a : $\underline{U} = Z_{eq}\, \underline{I} \implies \boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{Z_{eq}}}$ $\quad (*)$

* donc le module de $\underline{I}$: $\quad \left|\underline{I}\right| = \frac{|U|}{|Z_{eq}|} \implies I_m = \frac{U_m}{|Z_{eq}|} = \frac{U_{eff}.\sqrt{2}}{|Z_{eq}|}$

AN : $\quad I_m = \frac{U_{eff}.\sqrt{2}}{|Z_{eq}|} = \frac{100.\sqrt{2}}{\sqrt{20^2+5^2}} = 6.84\, A \implies \boxed{I_m = 6.84\, A}$

2- Calculer la phase du courant I :

les valeurs complexes du courant et de la tension sont de la forme :

$$\begin{cases} \underline{U} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} \\ \underline{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} \end{cases} \xrightarrow[\text{réduite}]{\text{forme}} \begin{cases} \underline{U} = U_m e^{j\varphi_u} \implies arg(\underline{U}) = \varphi_u = 0 \\ \underline{I} = I_m e^{j\varphi_i} \implies arg(\underline{I}) = \varphi_i \end{cases}$$

- Puisque la tension $\underline{U}$ est à l'origine des phases : $\varphi_u = 0 \quad \leftrightarrow \quad \underline{U} = U_m$
- D'après la relation précédente $(*)$:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{Z_{eq}} \quad \rightarrow \quad arg(\underline{I}) = arg(\underline{U}) - arg\,(Z_{eq})$$

$\Rightarrow \quad \varphi_i = 0 - arctg\left(\frac{5}{20}\right) = -arctg(-0.25) = -0.24$

$\boxed{\varphi_i = -0.24\ (rad)}$

3- <u>L'expression temporelle du courant i(t) et de la tension u(t) :</u>

$u(t) = U_m cos(\omega t + \varphi_u) = U_{eff}\sqrt{2}\ cos(\omega t + \varphi_u) = 100\sqrt{2}\ cos(2\pi f.t + 0)$

$\boxed{u\ (t) = 100\ \sqrt{2}\cos\ (100\ \pi\ t)}$

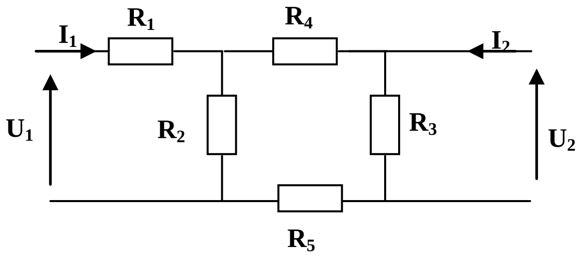
<u>Chapitre 4</u> : Quadripôles passifs - Filtres

<u>Exercice 1</u>

<u>Déterminer les paramètres **Z** du réseau suivant :</u>

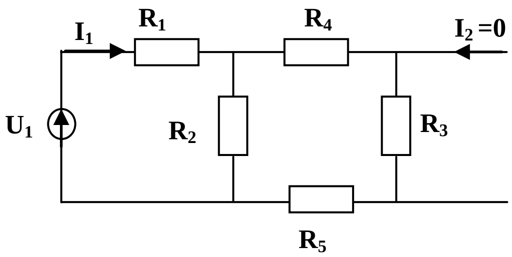
- On a les équations du quadripôle :

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11}\ I_1 + Z_{12}\ I_2 \\ U_2 = Z_{21}\ I_1 + Z_{22}\ I_2 \end{cases}$$



- On ouvre les bornes de la sortie : $I_2 = 0$ (sortie en circuit ouvert)

❖ $Z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_{eq} = R_{eq}$



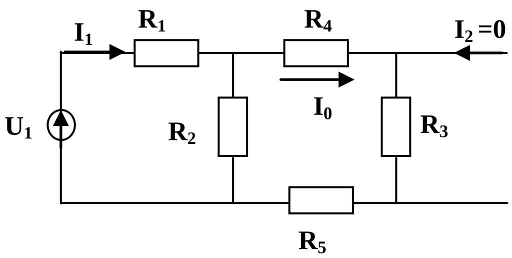
$R_{eq} = R_1 + R_2 \parallel (R_3 + R_4 + R_5)$

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + \frac{R_2\ (R_3 + R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = Z_{11}}$$

<u>AN :</u>

$R_{eq} = 6 + \frac{3\ (1+4+1)}{3+1+4+1} = 8\ \Omega \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Z_{11} = R_{eq} = 8\Omega}$

❖ $Z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$



On a : $U_2 = R_3\ I_0$

En utilisant le pont diviseur de courant, on obtient la valeur de I_0 :

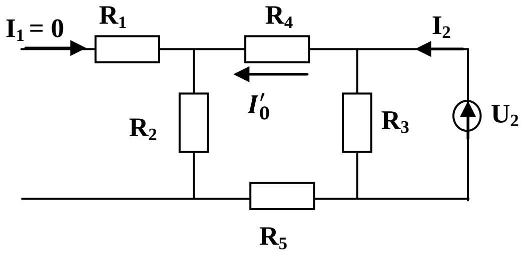
$$I_0 = \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}\, I_1$$

Donc :

$$U_2 = \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}\, I_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}}$$

AN : $Z_{21} = \frac{1\times3}{3+1+4+1} = \frac{1}{3}\Omega \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{21} = \frac{1}{3}\Omega}$

- Maintenant, pour calculer les deux autres paramètres il faut ouvrir les bornes d'entrée I_1=0 (entrée en circuit ouvert) :



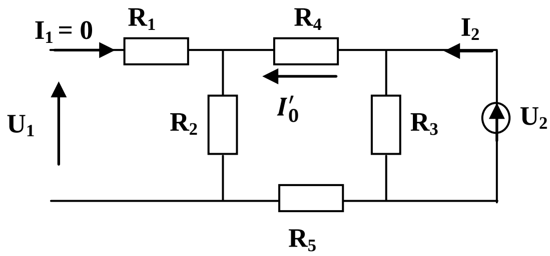
❖ $Z_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$

$$Z_{22} = R'_{eq} = R_3 \parallel (R_2 + R_4 + R_5)$$

$$\boxed{Z_{22} = \frac{R_3\,(R_2 + R_4 + R_5)}{R_3 + R_2 + R_4 + R_5}}$$

AN :

$$Z_{22} = \frac{1\,(3+4+1)}{1+3+4+1} = \frac{8}{9}\,\Omega \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{11} = \frac{8}{9}\Omega}$$



❖ $Z_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$

On a : $U_1 = R_2\, I'_0$

En utilisant le pont diviseur de courant, on obtient :

$$I'_0 = \frac{R_3}{R_3 + R_2 + R_4 + R_5}\, I_2$$

Donc :

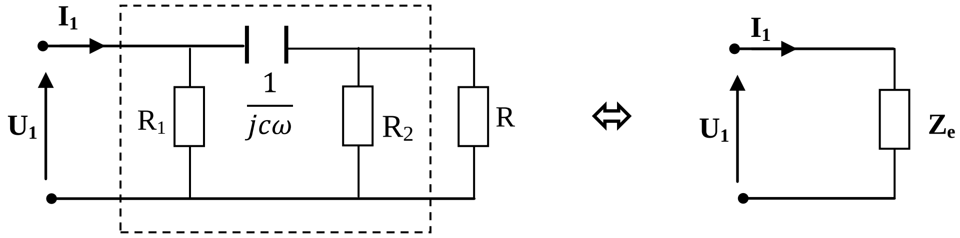
$$U_1 = \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2 + R_4 + R_5}\, I_2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{12} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2 + R_4 + R_5}}$$

Application Numérique : $Z_{12} = \frac{3\times1}{1+3+4+1} = \frac{1}{3}\Omega \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Z_{21} = \frac{1}{3}\Omega = Z_{12}}$

Exercice 2

Déterminer l'impédance d'entrée Z_e du quadripôle :

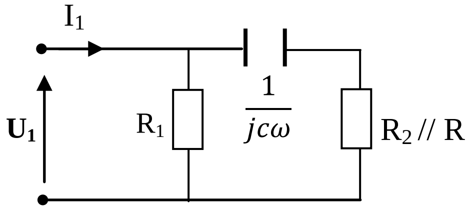
En notation complexe le circuit devient



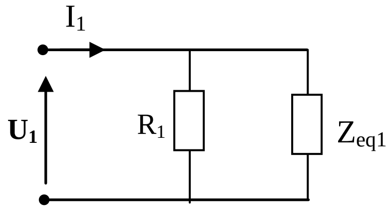
Calculons maintenant l'impédance d'entrée : $Z_e = \frac{U_1}{I_1}$

Il s'agit tout simplement de calculer l'impédance équivalente vue des bornes d'entrée :

- $R_2 \parallel R$ (en parallèle) ➔

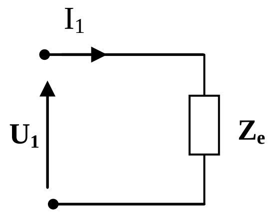


- $\frac{1}{jc\omega}$ en série avec $(R_2 \parallel R)$ ➔



$$Z_{eq1} = \frac{1}{j\omega c} + (R_2 \parallel R) = \frac{1}{j\omega c} + \frac{R_2\, R}{R_2 + R}$$

- $Z_{eq1} \parallel R_1$ (en parallèle) ➔



enfin l'impédance d'entrée est donnée par :

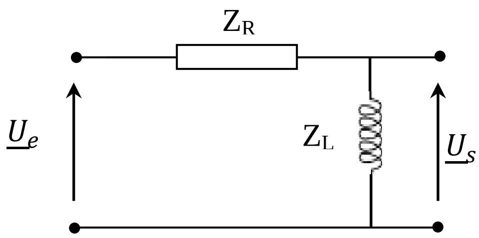
$$Z_e = \left(Z_{eq1} \parallel R_1\right) = \frac{R_1\, Z_{eq1}}{R_1 + Z_{eq1}} = \frac{R_1\left(\frac{1}{j\omega c} + \frac{R_2\, R}{R_2 + R}\right)}{R_1 + \frac{1}{j\omega c} + \frac{R_2\, R}{R_2 + R}}$$

$$\boxed{Z_e = \frac{R_1\, R_2\, RC\omega - jR_1(R_2 + R)}{(R_1\, R_2 + R_1 R + R_2 R)C\omega - j(R_2 + R)}}$$

Exercice 3

- **Fonction de transfert**

$$\underline{U}_s = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L}\underline{U}_e = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}\underline{U}_e = \frac{1}{1 + j\dfrac{R}{L\omega}}\underline{U}_e$$



(Pont diviseur de tension)

$$\Rightarrow \quad \underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\dfrac{R}{L\omega}}$$

- **Amplitude $G(\omega)$ et phase $\varphi\ (\omega)$:**

Soit :

$$\boxed{G\ (\omega) = |\underline{H}| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}}$$

et

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi\ (\omega) &= \arg\left(\underline{H}\right) = \arg\left(jL\omega\right) - \arg\left(R + jL\omega\right) = arctg\ (\infty) - arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right)\\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\end{aligned}}$$

- **Pulsation de coupure ω_C**

  - on a : $G_{(\omega_C)} = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ $\qquad G_{max} = ?$

$G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{L\omega}\right)^2}}$ donc : $\quad G \nearrow \ \Rightarrow \left(\frac{R}{L\omega}\right) \searrow 0 \ \Rightarrow \omega \nearrow \ \Rightarrow \omega \longrightarrow \infty$ (filtre passe-haut)

$$G_{max} = G(\omega \to \infty) = 1$$

$$G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{L\omega_c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + \left(\frac{R}{L\omega_c}\right)^2$$

$\Rightarrow \boxed{\omega_c = R/L}$ fréquence de coupure

- **<u>Expression du gain G_{dB} et de la phase φ en fonction de ω et ω_c :</u>**

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega_c}{\omega}} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

➢ Le gain G_{dB} :

$$\boxed{G_{dB} = 20\log G = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c/\omega)^2}}\right) = -10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right)}$$

➢ La phase : $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)$

- **<u>Diagramme de Bode</u>**

On fait intervenir la pulsation réduite $x = \omega/\omega_C$:

$$\boxed{\begin{cases} G_{dB} = -10\log\left(1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right) = -10\log\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = -10\log\left(1 + x^{-2}\right) \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x \end{cases}}$$

➢ **<u>Asymptotes de la réponse en gain :</u>**

$x \to 0^+ \Rightarrow G_{dB} \cong -\log x^{-2} = +20\log x$ (asymptote oblique, de pente 20dB par décade)

$x \to \infty \Rightarrow G_{dB} \cong -10\log 1 = 0$ (asymptote horizontale)

➢ **<u>Asymptote de la réponse en phase</u>** :

$$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \to \frac{\pi}{2} - arctg(0) = \frac{\pi}{2}$$

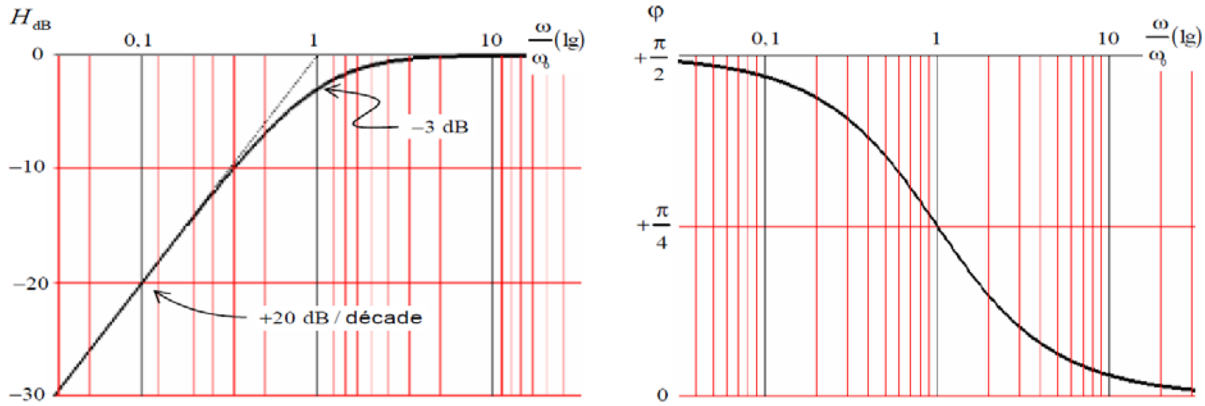
$$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi \to 0$$

- Aux très basses fréquences, le gain G_{dB} est une droite de pente +20dB/décade**.** Aux très hautes fréquences, le gain est confondu avec l'axe **ox**.
- La phase admet pour asymptote $\varphi = \pi/2$ en basse fréquence et $\varphi = 0$ en hautes fréquences.
- Sachant que $G_{dB}(\omega_c) = -3dB$ et $\varphi(\omega_c) = +\pi/4$ pour $x = 1\,(\omega = \omega_C)$, on peut représenter le diagramme de Bode comme suit :

$$\begin{cases} G_{dB} = -10\log\left(1+x^{-2}\right) \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x \end{cases}$$

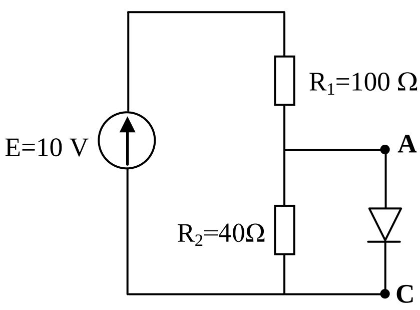
x	10^{-2}	10^{-1}	1	10	100
G_{dB}	-40	- 20	- 3	- 0.04	- 0.00043
φ	89.43°	84.29°	45.02°	5.71°	0.57°
	1.561 rd	1.471 rd	0.785 rd	0.099 rd	0.0099 rd

Le diagramme de Bode :



Chapitre 5 : Diodes à semiconducteur

Exercice 1



➢ Déterminer l'état passant ou bloqué de la diode :

- La meilleure technique pour rechercher si une diode est passante consiste à supposer à priori que la diode est bloquée. Si tel est le cas, ceci est très facile à vérifier ; si elle est passante, on aboutit très vite à une absurdité qui montre qu'elle ne peut pas être bloquée.
- Supposons donc que la diode soit bloquée. Dans ce cas, aucun courant ne circule dans la diode et les deux résistances forment un diviseur de tension :

On a donc : $$V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = \frac{40}{140} \times 10\,V = 2{,}8\,V$$

La diode présenterait donc une différence de potentiel à ses bornes de 2,8 V, ce qui est impossible. La diode est donc passante et présente à ses bornes une différence de potentiel de 0,7 V.

- <u>Déterminer le courant I qui traverse la diode passante :</u>

Calculons maintenant le courant I dans la diode. Soit I_1 le courant dans R_1 et I_2 le courant dans R_2. Orientons ces trois courants vers le bas.

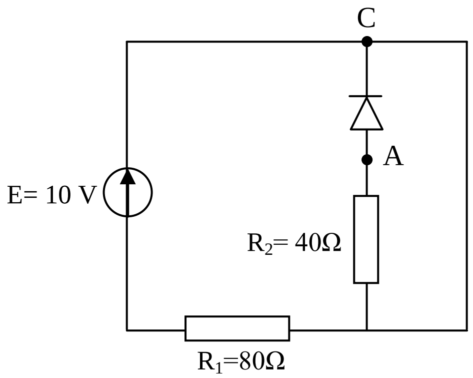
On a donc : $I_1 = \dfrac{E + V_A}{R_1} = \dfrac{10 - 0{,}7}{100} = 93\,mA \quad et \quad I_2 = \dfrac{V_A}{R_2} = \dfrac{0{,}7}{40} = 17{,}5\,mA$

D'après la loi des nœuds en A : $\boxed{I = I_1 - I_2 = 75{,}5\,mA}$

<u>Exercice 2</u>

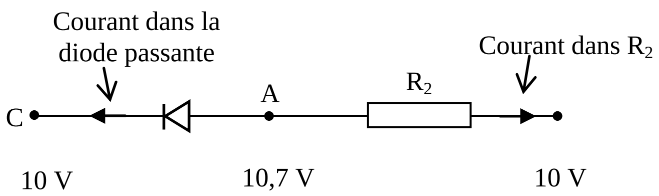
- <u>Déterminer l'état passant ou bloqué de la diode :</u>

- En utilisant la même technique que dans l'exercice 1, supposons que la diode soit bloquée. Aucun courant ne circule dans la résistance R_2. Le circuit se résume à une simple maille. Comme il n'y a pas de chute de potentiel aux bornes de R_2, l'anode et la cathode de la diode sont aux mêmes potentiels. La tension V aux bornes de la diode est nulle, ce qui est tout à fait cohérant avec le fait que la diode soit bloquée.



- Si on suppose que la diode est passante, on a obligatoirement V_A-V_C=0,7 V ;

Or $V_C = 10$ V $\Rightarrow$ $V_A = 10{,}7$ V, ce qui donnerait la configuration suivante :



qui est manifestement impossible. La diode est donc bien bloquée.

- Si l'hypothèse diode bloquée ne conduit pas à une absurdité, il vaut mieux, comme ici, vérifier que l'hypothèse diode passante est fausse avant de conclure.