Support de cours

Présentée par Mohamed ZITOUNI

Thème

Les équations différentielles

Département:

SM-2020-2021

ANNEXE 1

1. **Résoudre l'équation différentielle du premier ordre par la méthode de séparations des variables :**

$$y' = -\frac{x}{ye^{x^2}} \qquad (E)$$

On remplace $y' = \frac{d(y)}{d(x)}$, dans (E) puis on sépare les variables:

$$d(x)y\frac{d(y)}{d(x)} = -\frac{x}{ye^{x^2}}yd(x)$$

$$\Rightarrow yd(y) = -xe^{-x^2}d(x) \Rightarrow \int yd(y) = \int -xe^{-x^2}d(x)$$

$$\int yd(y) = \frac{1}{2}y^2 + c_1$$

$$\int -xe^{-x^2}d(x) = \ ?$$

Nous remarquons que $\frac{d(e^{-x^2})}{d(x)} = -2x$

Donc : $\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}d(x) = e^{-x^2} + c_2$

$$\frac{1}{2}y^2 + c_1 = e^{-x^2} + c_2 \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = e^{-x^2} + c_2 - c_1 \Rightarrow y \ = \pm\sqrt{(e^{-x^2} + c)}$$

2. $y' + 2xy = 0 \qquad (E)$

On remplace $y' = \frac{d(y)}{d(x)}$, dans (E) puis on sépare les variables:

$$\frac{d(y)}{d(x)} + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)} = -2xy \Rightarrow \frac{d(y)}{y} = -2xd(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d(y)}{y} = \int -2xd(x)$$

$$\ln\left| \ y)\right| + c_1 = -x^2 + c_2 \Rightarrow \ln\left| \ y \ \right| = -x^2 + c \Rightarrow y = \pm e^c e^{-x^2} \ \Rightarrow y = ke^{-x^2}$$

- $(1+x)\frac{d(y)}{d(x)} = 4y \Rightarrow \frac{d(y)}{y} = 4\frac{d(x)}{(1+x)}$

$$\int \frac{d(y)}{y} = \ln\left| \ y \ \right| + c_1$$

$$4\int \frac{d(x)}{(1+x)} = 4\ln\left|1 + x \ \right| + c_2$$

$$\ln\left| \ y \ \right| + c_1 = 4\ln\left|1 + x \ \right| + c_2$$

ANNEXE 1

$$\ln|\ y\ | = \ln(|1+x\ |)^4 + c \Rightarrow y = k(1+x)^4 \quad \text{,avec} \quad k = \pm e^c$$

1. Résoudre l'équation différentielle du premier ordre de la forme:

$$ay' + by = f(x) \qquad \text{(E)}$$

C'est une équation différentielle homogène du premier ordre avec second membre.

Il y'a trois étape pour résoudre cette équation différentielle.

- Résolution de l'équation homogène associée (son second membre) :

$$ay' + by = 0 \Rightarrow ay' = -by \Rightarrow y' = -\frac{b}{a}y \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)} = --\frac{b}{a}y \Rightarrow \frac{d(y)}{y} = -\frac{a}{b}d(x)$$

$$\ln|y| + c_1 = -\frac{a}{b}x + c_2 \Rightarrow y_h = ke^{-\frac{b}{a}x}$$

Avec : $k = \pm e^{c_2 - c_1}$

Recherche d'une solution particulière (méthode de la variation de la constante):

- $$y_p = k(x)e^{-\frac{b}{a}x} \Rightarrow y'_p = k'(x)e^{-\frac{b}{a}x} - \frac{b}{a}k(x)e^{-\frac{b}{a}x}$$

- Nous remplaçons y_p' dans l'équation (*E*) :

- $$a(k'(x)e^{-\frac{b}{a}x} - \frac{b}{a}k(x)e^{-\frac{b}{a}x}) + b(k(x)e^{-\frac{b}{a}x}) = f(x) \Rightarrow k'(x)e^{-\frac{b}{a}x} = f(x) \Rightarrow k'(x) = f(x)e^{\frac{b}{a}x}$$

$$k(x) = \int f(x)e^{\frac{b}{a}x})d(x)$$

La solution globale : $y_S = y_h + y_p = ke^{-\frac{b}{a}x} + (\int f(x)e^{\frac{b}{a}x})d(x))e^{-\frac{b}{a}x}$

-
- Exemples : Résoudre les équations différentielles suivantes :

• $y' + 2y = x^2$	(E_1)
• $y' + y = 2\sin(x)$	(E_2)
• $y' - y = (x+1)e^x$	(E_3)
• $y' + y = x - e^x + \cos(x)$	(E_4)

ANNEXE 1

1.

$$y'+2y=0 \Rightarrow y'=-2y \Rightarrow y'=-2y \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)}=-2y \Rightarrow \frac{d(y)}{y}=-2d(x)$$

$\ln|y|+c_1=-2x+c_2 \Rightarrow y_h=ke^{-2x}$

Avec ; $c=c_2-c_1$ et $k=e^c$

- Recherche d'une solution particulière (la variation de la constante):

$$y_p=k(x)e^{-2x} \Rightarrow y'_p=k'(x)e^{-2x}-2k(x)e^{-2x}$$

- Nous remplaçons y_p' dans l'équation (E_1) :

$$(k'(x)e^{-2x}-2k(x)e^{-2x})+2(k(x)e^{-2x})=x^2 \Rightarrow k'(x)e^{-2x}=x^2 \Rightarrow k'(x)=x^2e^{2x}$$

$$k(x)=\int(x^2e^{2x})d(x)$$

$k(x)$ est un produit de deux fonctions, on l'intègre par partie :

Posons $u(x)=x^2 \Rightarrow u'(x)=2x$

$$v'(x)=e^{2x} \Rightarrow \int v'(x)d(x)=\int e^{2x}d(x) \Rightarrow v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

Donc ; $k(x)=(x^2)(\frac{1}{2}e^{2x})-\int(2x)(\frac{1}{2}e^{2x})d(x)=(x^2)(\frac{1}{2}e^{2x})-\int(x)(e^{2x})d(x)$

Posons ; *i(x)*=$\int(x)(e^{2x})d(x)$, on integer *I(x)* .

Posons $u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1d(x)$

$$v'(x)=e^{2x} \Rightarrow \int v'(x)d(x)=\int e^{2x}d(x) \Rightarrow v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$i(x)=(x)(\frac{1}{2}e^{2x})-\int(\frac{1}{2}e^{2x})d(x)=(x)(\frac{1}{2}e^{2x})-(\frac{1}{2})\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\Rightarrow i(x)=\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})$$

$$k(x)=e^{2x}(\frac{1}{2})(x^2-x+\frac{1}{2})$$

La solution globale : $y_S=y_h+y_p=(ke^{-2x})+(\frac{1}{2}(x^2-x+\frac{1}{2}))$, $k\in IR$

- **Deuxième méthode** :
- la solution homogène *f(x)*donne

$$y_p=(ke^{-2x})$$

ANNEXE 1

La solution particulière de (E_1), dépond de la forme du second membre (ici le coefficient de l'exponentiel égale au coefficient de y, alors le degré du polynôme est : deg Q=deg p+1):

$y_p = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_p' = 2ax + b$

On remplace y_p' dans (E_1) ;

$(2a(x)+b)+2(ax^2 + b(x)+c) = x^2 \Rightarrow 2ax^2 + 2(b+a)(x)+2c+b = x^2$

$\Rightarrow 2(a)=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ et $2(a+b)=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$ et

$2c+b=0 \Rightarrow 2c=-b \Rightarrow c=-\frac{b}{2} \Rightarrow c=\frac{1}{4}$

Alors $y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

La solution globale est : $y_s = y_h + y_p = ke^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

2.

$y'+y = 2\sin(x)$ (E$_2$)

$$y'+y=0 \Rightarrow y'=-y \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)} = -y \Rightarrow \frac{d(y)}{y} = -d(x)$$

$\ln|y| + c_1 = -x + c_2 \Rightarrow y_h = ke^{-x}$

Avec ; $c = c_2 - c_1$ et $k = e^c$

- Recherche d'une solution particulière (la variation de la constante):

$$y_p = k(x)e^{-2x} \Rightarrow y'_p = k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-x}$$

- Nous remplaçons y_p' dans l'équation (E$_2$) :

$(k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}) + (k(x)e^{-x}) = 2\sin(x) \Rightarrow k'(x)e^{-x} = 2\sin(x) \Rightarrow k'(x) = 2\sin(x)e^{x}$

$$k(x) = 2\int(\sin(x)e^{x})d(x)$$

$k(x)$ est un produit de deux fonctions, on l'intègre par partie :

Posons $u(x)=\sin(x) \Rightarrow u'(x)=\cos(x)$

$$v'(x)=e^{x} \Rightarrow \int v'(x)d(x) = \int e^{x}d(x) \Rightarrow v(x) = e^{x}$$

Donc ; $k(x) = (\sin(x))(e^{x}) - \int(\cos(x)(e^{x})d(x) = (\sin(x))(e^{x}) - i(x)$

ANNEXE 1

Posons ; $i(x)=\int(\cos(x)(e^{x})d(x)$, on integer $i(x)$.

Posons : $u(x)=\cos(x)\Rightarrow u^{'}(x)=-\sin(x)$

$$v^{'}(x)=e^{x}\Rightarrow\int v^{'}(x)d(x)=\int e^{x}d(x)\Rightarrow v(x)=e^{x}$$

$$i(x)=\cos(x)(e^{x})-\int\sin(x)(e^{x})d(x)$$

-

$$k(x)=2\int\sin(x)d(x)=(\sin(x)(e^{x})-((\cos(x)e^{x}-\int\sin(x)e\ )$$

$$\Rightarrow k(x)=2\int\sin(x)d(x)=(\sin(x)(e^{x})-(\cos(x)e^{x}+\int\sin(x)e\ )$$

$$\Rightarrow k(x)=2\int\sin(x)d(x)-\int\sin(x)d(x)=\sin(x)(e^{x})-(\cos(x)e^{x}$$

- $$\Rightarrow k(x)=\int\sin(x)d(x)=\sin(x)(e^{x})-(\cos(x)e^{x}$$

La solution globale : $\begin{array}{l} y_S=y_h+y_p=(ke^{-x})+(e^{x}(\sin(x)-\cos(x))(e^{-x}) \\ y_S=y_h+y_p=(ke^{-x})+(\sin(x)-\cos(x) \end{array}$, $k\in IR$

- **deuxième méthode** :
- la solution homogène *f(x)*donne

$$y_p=(ke^{-x})$$

La solution particulière de (E2), dépond de la forme de second membre :

$$y_p=a\sin(x)+b\cos(x)\Rightarrow y_p^{'}=a\cos(x)-b\sin(x)$$

On remplace $y_p^{'}$ dans (E2) ;

$$a\cos(x)-b\sin(x)+a\sin(x)+b\cos(x)=2\sin(x)\Rightarrow(a+b)\cos(x)-(b-a)\sin(x)=2\sin(x)$$

$$\Rightarrow(a+b)=0\Rightarrow a=-b \text{ et } (b-a)=2\Rightarrow a=-1 \text{ et } b=1$$

Alors : $y_p=a\sin(x)+b\cos(x)\Rightarrow y_p=-\sin(x)+\cos(x)$

La solution globale est : $y_s=y_h+y_p=ke^{-x}+(-\sin(x)+\cos(x))$

3. $y'-y=(x+1)e^{x}$ (*E3*)

- la solution homogène ($f(x)$=0), $y'-y=0\Rightarrow\dfrac{d(y)}{d(x)}=y\Rightarrow\dfrac{d(y)}{y}=d(x)$

$$y_p=(ke^{x})$$

La solution particulière de (*E3*), dépond de la forme de second membre :

ANNEXE 1

$y_p = p(x)e^x$, alors le degré de polynôme ici est égale 2 (puisque e^x apparier dans les solutions homogène et particulière).

Donc $y_p = (ax^2 + bx + c)e^x \Rightarrow y_p{}' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

On remplace y_p' dans (E_3) ;

$$(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x - (ax^2 + bx + c)e^x = (x+1)e^x$$
$$\Rightarrow (2ax + b)e^x = (x+1)e^x \Rightarrow 2ax + b = x + 1$$

$$\Rightarrow (2a) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = 1$$

Alors : $y_p = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x$

La solution globale est : $y_s = y_h + y_p = ke^x + (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x = e^x(\frac{1}{2}x^2 + x + k)$

4. $y' + y = x - e^x + \cos(x)$ (E4)

- la solution homogène ($f(x)$=0), la solution homogène ($f(x)$=0),

$$y' - y = 0 \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)} = y \Rightarrow \frac{d(y)}{y} = d(x)$$

$$y_p = (ke^x)$$

$$y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)} = -y \Rightarrow \frac{d(y)}{y} = -d(x)$$

$$\ln|y| + c_1 = -x + c_2 \Rightarrow y_h = ke^{-x}$$

Avec ; $c = c_2 - c_1$ et $k = e^c$

- La solution particulière de $y' + y = x$

La solution particulière de (E_4), dépond de la forme de second membre :

$$y_p = (ax + b) \Rightarrow y_p' = a + (ax + b)$$

On remplace y_p' dans (E_4) ;

$$a + (ax + b) = x + 1$$
$$\Rightarrow ax = x \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow (a + b) = 0 \Rightarrow b = -1$$

ANNEXE 1

Alors : $y_{p1} = x - 1$

La solution particulière de $y' + y = -e^x$

$$y_p = (a)e^x \Rightarrow y'_p = ae^x$$

On remplace y'_p dans (E_4) ;

$$ae^x + (a)e^x = -e^x$$

$$\Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Alors : $y_{p2} = -\frac{1}{2}e^x$

La solution particulière de $y' + y = \cos(x)$

$$y_p = a\cos(x) + b\sin(x) \Rightarrow y'_p = -a\sin(x) + b\cos(x)$$

On remplace y'_p dans (E_4) ;

$$-a\sin(x) + b\cos(x) + a\cos(x) + b\sin(x) = \cos(x)$$

$$\Rightarrow (b-a)\sin(x) + (b+a)\cos(x) = \cos(x) \Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow b = a$$

$$\Rightarrow (b+a) = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Alors : $y_{p3} = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$

La solution globale est :

$$y_s = y_h + y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} = ke^{-x} + (x-1) - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x), \quad k \in IR$$