Ministère d'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Ziane Achour –Djelfa
Faculté des sciences exactes et informatique A. U : 2019/2020
Département des Sciences de la matière L1 : 1ère Année SM UEF : F112 (PHYS II)

TD N°1 : La charge électrique

Exercice N°1 :

1. Déterminer le nombre d'atomes et d'électrons constituant une pièce de monnaie en cuivre ($^{29}_{63}Cu$), neutre, de 3 g.

2. Cette pièce porte à présent une charge $Q = 5 \times 10^{-9}\,C$. Déterminer le nombre d'électrons perdus par la pièce et le comparer au nombre d'atomes.

Exercice N°2 :

Deux sphères conductrices identiques de masse $m = 10$ g portent des charges q_1 et q_2. On les met en contact, puis on les sépare.

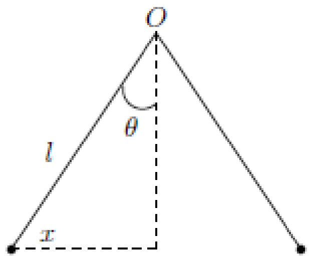
1. Calculer les charges q_1' et q_2' qu'elles prennent dans les cas suivants :

a) $q_1 = +4 \times 10^{-8}\,C$ et $q_2 = 0\,C$.

b) $q_1 = +3 \times 10^{-8}\,C$ et $q2 = +8 \times 10^{-8}\,C$.

c) $q_1 = +3 \times 10^{-8} C$ et $q2 = -8 \times 10^{-8} C$.

Préciser chaque fois le sens du transfert d'électrons.



2. Les deux masses sont suspendues au même point O par deux fils identiques de Nylon de longueur $l = 80\,cm$ (figure ci-dessous). En négligeant la masse des fils, calculer la distance $2x$ séparant les deux sphères pour les 3 cas précédents (on supposera que l'angle θ est suffisamment petit et g $= 10\,m.s^{-2}$). Donnée : $K = 9 \times 10^{9}\,C^{-2}.m^{3}.kg.s^{-2}$

Exercice N°3 :

Deux sphères conductrices identiques portant des charges de signes opposés s'attirent avec une force de $0.108\,N$, quand la distance qui les sépare est $d = 0.5\,m$. On les relie à l'aide d'un fil conducteur. Après avoir enlevé le fil, elles se repoussent avec une force de $0.036\,N$, pour la même distance.

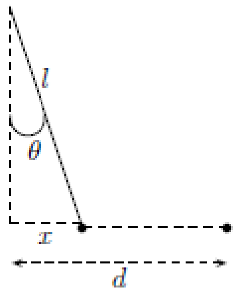
- Quelle était la charge initiale de chaque sphère ? (Les rayons des sphères sont très négligeables devant la distance d).

Exercice N°4 :

La figure ci-dessous représente un pendule constitué d'un fil de longueur $l = 10\,cm$ et d'une boule de masse $m = 9$ g portant une charge électrique $Q_1 = +2 \times 10^{-8}\,C$. On place à une distance d = 4 cm de cette boule une charge ponctuelle $Q_2 = -5 \times 10^{-8}\,C$. On prendra g $= 10\,m.s^{-2}$.

1. Calculer l'angle θ d'inclinaison du pendule (on le supposera suffisamment petit).

2. Calculer la force électrostatique qui s'exerce sur la boule.



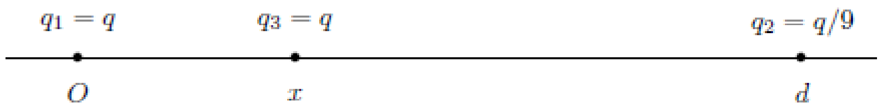
TD N°1 : La charge électrique

Exercice N°5 :

On considère le système de charges ponctuelles, représenté sur la figure ci-dessous. Les charges positives q_1 et q_2 sont fixées respectivement aux points O et A distants de d. Soit une charge q_3, assujettie à se déplacer le long du segment OA :

1. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur q_3, au point M.
2. A quelle abscisse x_0, la charge q_3 est dans une position d'équilibre ?

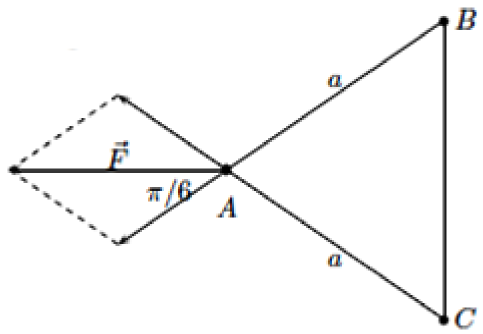
$A.N : d = 4\,cm.$



Exercice N°6 :

Trois petites boules identiques de masse $m = 10$ g, sont suspendues à un même point au moyen de trois fils de soie distincts de longueur $l = 1\,m$. Ces trois boules de même charge q se positionnent alors au sommet d'un triangle équilatéral de côté $a = 0.1\,m$.

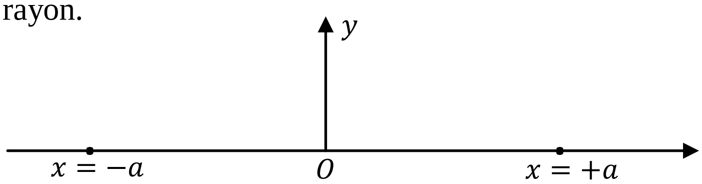
- Calculer la charge q.



Exercice N°7 :

Deux charges électriques ponctuelles $(+q)$ sont séparées par une distance $2a$. On place une autre charge ponctuelle mobile dans le plan médiateur du segment $2a$.

- Montrer qu'il existe, dans ce plan, un cercle pour lequel la charge mobile est soumise à une force maximale.
- Déterminer son rayon.



TD N°2: Champs et potentiels électriques

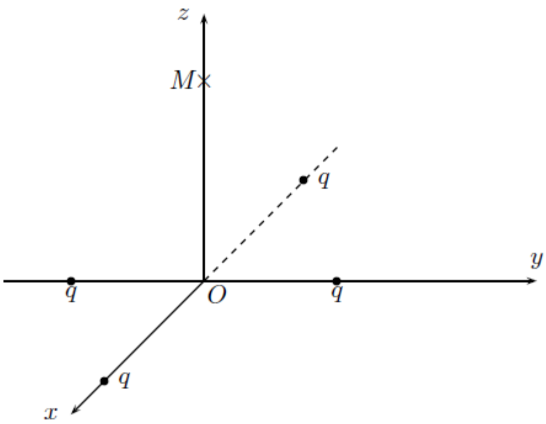
Exercice N°1 :

On place des charges électriques ponctuelles identiques de valeur q aux points : $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(-a, 0, 0)$ et $D(0, -a, 0)$.

1- Calculer le champ électrique créé par ces charges en un point M quelconque sur l'axe Oz, tel que $OM = z$.

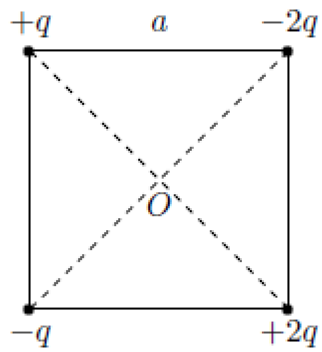
2- Calculer le potentiel créé en ce point.

3- Que deviennent ces expressions si on met des charges $+q$ en A et D et $-q$ en B et C?



Exercice N°2 :

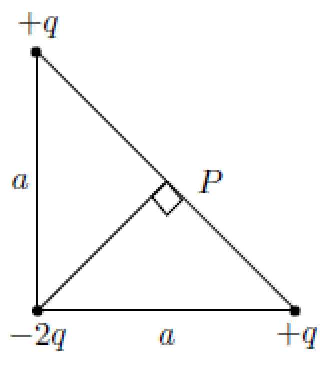
Déterminer le vecteur champ électrique $\vec{E}_0$ et le potentiel V_0, au centre O du carré de côté a (voir figure). A.N. : $a = 3\ cm$ et $q = 10^{-11} C$.



Exercice N°3:

Déterminer le vecteur champ électrique $\vec{E}_P$ et le potentiel V_P au point P (voir figure).

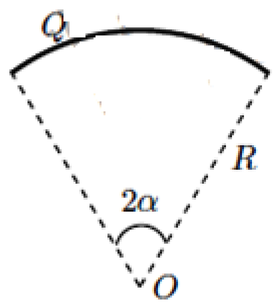
A.N. : $a = 6\ cm$ et $q = 2 \times 10^{-11}\ C$.



Exercice N°4:

Un arc de cercle de rayon R et d'ouverture 2α porte une charge Q uniformément répartie.

1. Quel est le champ électrostatique créé en son centre O?
2. Quel est le potentiel au point O?



TD N°3 : Théorème de Gauss

Exercice N°1 :

Calculer le champ électrique crée en un point quelconque de l'espace par une droite infinie chargée avec une densité linéique $(\lambda > 0)$.

Exercice N°2 :

En utilisant le théorème de Gauss trouver le champ électrique crée par :

1. Une distribution rectiligne de densité linéique uniforme λ, en un point situé à une distance d de la droite.
2. Une distribution plane infinie de densité surfacique uniforme σ, en un point situé à une distance d du plan.

Exercice N°3 :

Soit un cylindre creux de rayon R et de longueur infinie chargé avec une densité surfacique uniforme σ ;

1- calculer le champ électrostatique en un point M situé à une distance d de l'axe du cylindre quand :

A- M se trouve à l'intérieur du cylindre.

B- M se trouve à l'extérieur du cylindre.

Même questions pour un cylindre plein de rayon R et de longueur infinie chargé avec une densité volumique uniforme ρ.

Exercice N°4 :

Soit une sphère creuse de rayon R chargé avec une densité surfacique $\sigma = constante$, calculer en fonction de la charge Q de la sphère, le champ électrostatique en un point M situé à une distance r de son centre quand :

1- M se trouve à l'intérieur de la sphère.

2- M se trouve à l'extérieur de la sphère.

Même questions pour une sphère pleine de rayon R chargée avec une densité volumique uniforme ρ.

Ministère d'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Ziane Achour –Djelfa
Faculté des sciences exactes et informatique A. U : 2019/2020
Département des Sciences de la matière L1 : 1ère Année SM UEF : F112 (PHYS II)

TD N°4: Dipôle électrique

Exercice N°1 :

Une circonférence de centre O et de rayon a porte une charge q infiniment répartie (densité linéique $\lambda > 0$).

Calculer le champ et le potentiel électriques en un point de l'axe y situé à une distance y de O.

Exercice N°2 :

Soit un dipôle D, son moment étant $\vec{P}$ et a la distance entre ses deux charges $-q$ et $+q$ (Figure ci-dessous).

1/ Calculer le champ et le potentiel électriques produits par le dipôle D au point M en fonction de P, θ et r, sachant que $a \ll r$.

2/ Trouver l'équation des surfaces équipotentielles ainsi que l'équation des lignes de champ.

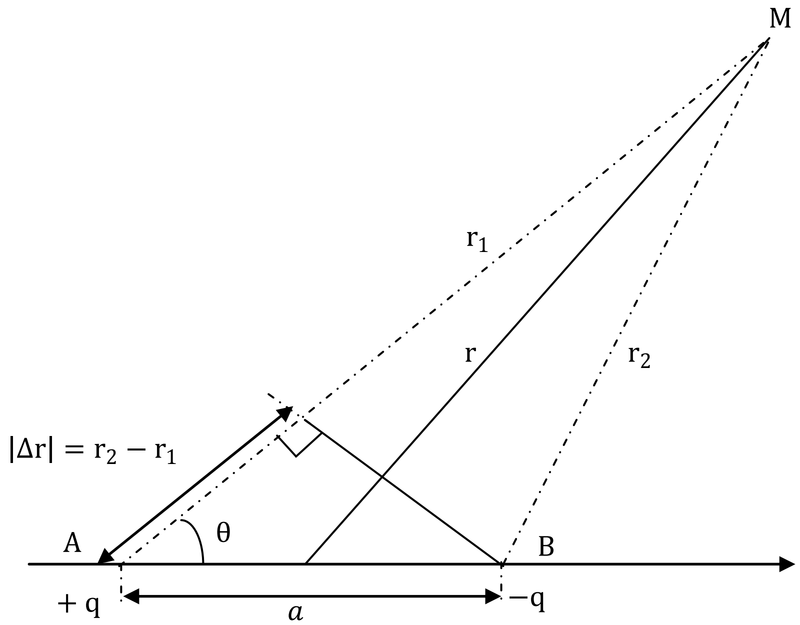


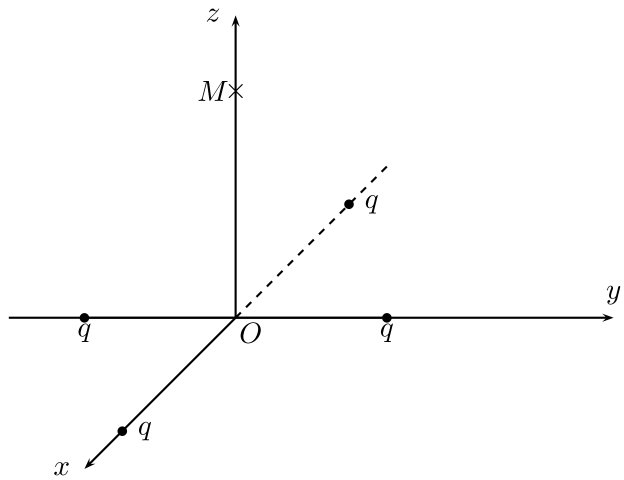
Figure 1. Dipôle électrique

Deuxième partie

Champs et Potentiels Électriques

Exercice II.1

On place des charges électriques ponctuelles identiques de valeur q aux points :
$A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(-a,0,0)$ et $D(0,-a,0)$.

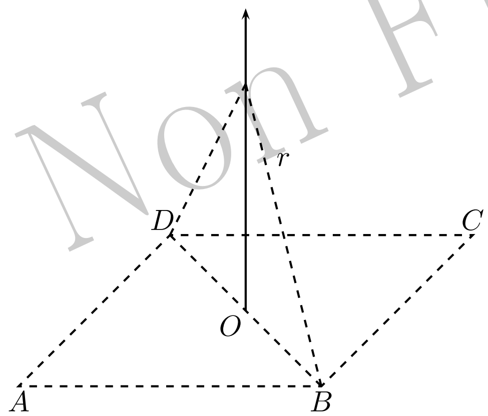


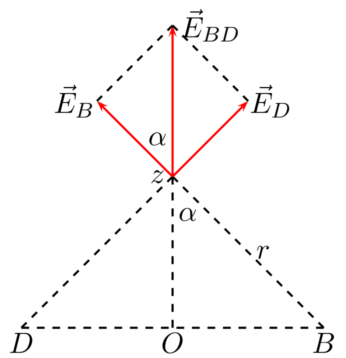
1- Calculer le champ électrique créé par ces charges en un point M quelconque sur l'axe Oz, tel que $OM = z$.

2- Calculer le potentiel créé en ce point.

3- Que deviennent ces expressions si on met des charges $+q$ en A et C et $-q$ en B et D ?

Solution Exercice II.1



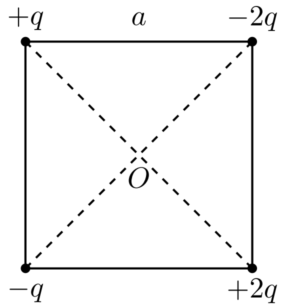


1- La distance séparant chaque charge de O est $OA = OB = OC = OD = a$, donc $r = \sqrt{a^2 + z^2}$, voir figure. Les charge B et D créent donc le même champ (en module) $E_B = E_D = Kq/r^2$. Le champ total est parallèle

à OZ à cause de la symétrie : $\vec{E}_{BD} = 2E_B \cos(\alpha)\,\vec{k}$ où $\cos(\alpha) = z/r$. Les charges A et C créent le champ $\vec{E}_{AC} = 2E_A \cos(\alpha)\,\vec{k}$. Le champ total est $\vec{E}(z) = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BD} = 4kqz\left(a^2 + z^2\right)^{-3/2}\vec{k}$.
2- $V(z) = 4Kq/r = 4Kq/\sqrt{a^2 + z^2}$
3- $\vec{E}_{AC} = -\vec{E}_{BD}$. Le champ total est donc nul. De même $V(z) = 0$.

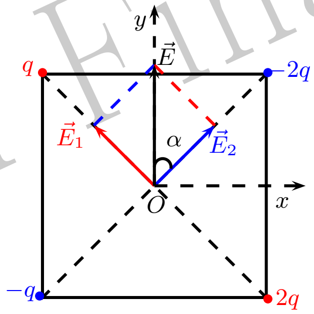
Exercice II.2

Déterminer le vecteur champ électrique $\vec{E}_0$ et le potentiel V_0, au centre O du carré de côté a (voir figure). A.N. : $a = 3$cm et $q = 10^{-11}$C.



Solution Exercice II.2

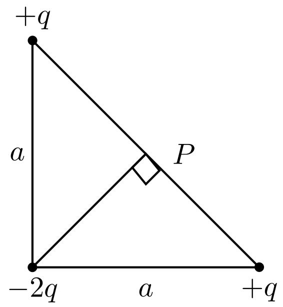
Données : $K = 9 \times 10^9 SI$, $a = 3 \times 10^{-2} m$, $q = 10^{-11} C$.



Le champ électrique :
Les charges $(+2q)$ et $(+q)$ donnent un champ total $\vec{E}_1$ au point O égal à celui donné par une seule charge $(+q)$ située à la place de $(+2q)$. Il en est de même pour les charges $(-2q)$ et $(-q)$ qui créent $\vec{E}_2$. On a donc deux charges $(+q)$ et $(-q)$ distantes de a et on calcule le champ au point 0 situé sur la médiane à une distance $r = a/\sqrt{2}$. En considérant un système de référence Oxy et un angle $\alpha = \pi/4$ entre la médiane et les diagonales du carré, on peut facilement voir que $E = 2E_1 \cos\alpha$ car E est la diagonale d'un losange de côté $E_1 = E_2 = 2Kq/a^2$. Par conséquent, $\vec{E} = 2E_1 \cos\alpha \vec{j} = 2\sqrt{2}\frac{K}{a^2}q\vec{j} = 282.84\vec{j}$ en V/m.
Le potentiel est nul en O, $V = \sqrt{2}Kq/a - \sqrt{2}Kq/a + 2\sqrt{2}Kq/a - 2\sqrt{2}Kq/a = 0$.

Exercice II.3

Déterminer le vecteur champ électrique $\vec{E}_P$ et le potentiel V_P au point P (voir figure). A.N. : $a = 6$ cm et $q = -2\,10^{-11}$ C.

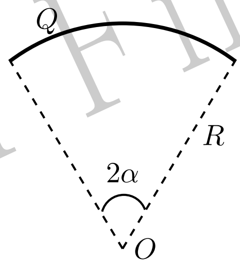


Solution Exercice II.3

Données : $a = 6 \times 10^{-2}m$, $q = -2\,10^{-11}C$.
Le champ est égal à celui créé par $(-2q)$ et vaut $E = 4Kq/a^2 = 200\frac{V}{m}$ car $r = a/\sqrt{2}$. Il fuit $(-2q)$ et le potentiel est nul.

Exercice II.4

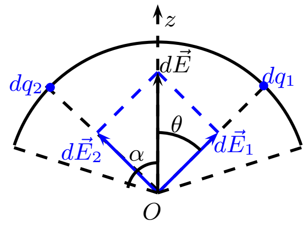
Un arc de cercle de rayon R et d'ouverture 2α porte une charge Q uniformément répartie.



1. Quel est le champ électrostatique créé en son centre O ?
2. Quel est le potentiel au point O ?

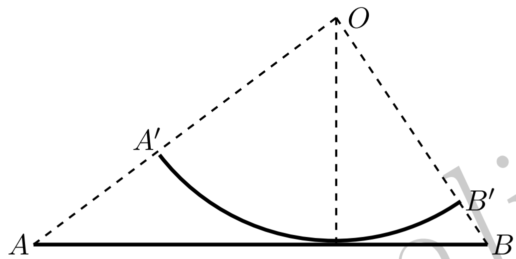
Solution Exercice II.4

1. Le champ est parallèle à la bissectrice de l'angle (2α) que l'on choisit comme étant l'axe Oz. Deux charges élémentaires $dq_1 = dq_2 = dq$ symétriques par rapport à Oz avec un angle θ, créent un champ $d\vec{E} = 2K\left(dq/R^2\right)\cos(\theta)\,\vec{k}$ avec $dq = \lambda R d\theta$. Le champ total est $\vec{E} = \int_0^\alpha d\vec{E} = 2\int_0^\alpha K\left(\lambda R d\theta/R^2\right)\cos(\theta)\,\vec{k} = 2K\left(\lambda/R\right)\sin(\alpha)\,\vec{k}$.
2. Le potentiel est $V = \int_0^\alpha 2K dq/R = 2\alpha K\lambda$.



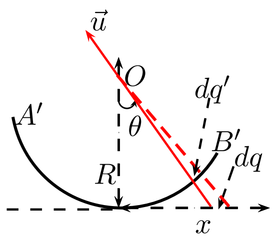
Exercice II.5

Un segment de droite AB porte une charge totale Q uniformément répartie.
Montrer que le champ, créé au point O, est le même que celui que créerait un arc de cercle portant la même densité de charge, tangent à AB, centré sur O et vu de O sous le même angle que le segment AB.



Solution Exercice II.5

Soit un point x quelconque sur AB portant la charge $dq = \lambda dx$. Il lui correspond un point portant la charge $dq' = \lambda R d\theta$ sur l'arc $A'B'$ de rayon R.
La charge dq crée le champ $d\vec{E} = K\frac{\lambda dx}{r^2}\vec{u}$ (où r est la distance entre x et O). La charge dq' crée le champ $d\vec{E'} = K\frac{\lambda R d\theta}{R^2}\vec{u}$. Or $x = R\tan(\theta)$ donc $dx = \frac{R}{\cos^2\theta}d\theta$ et comme $\cos\theta = R/r$ alors $dx = \frac{r^2}{R}d\theta$. Ce qui donne $d\vec{E} = d\vec{E'} = K\frac{\lambda d\theta}{R}\vec{u}$. Par conséquent, $\vec{E} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} K\frac{\lambda d\theta}{R}\vec{u}$ et $\vec{E'} = \int_{\theta_{A'}}^{\theta_{B'}} K\frac{\lambda d\theta}{R}\vec{u}$. Comme les angles vérifient $\theta_A = \theta_{A'}$ et $\theta_B = \theta_{B'}$, on trouve $\vec{E} = \vec{E'}$.



Remarques :
- $\vec{u} = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}$ dépend de θ. L'intégrale donne $\vec{E'} = \frac{K}{R}\lambda\left(-\cos\theta'_A + \cos\theta'_B\right)\vec{i} + \frac{K}{R}\lambda\left(\sin\theta'_B - \sin\theta'_A\right)\vec{j}$.
- L'exercice II.4 est un cas particulier du II.5 avec $\theta'_A = -\alpha$ et $\theta'_B = +\alpha$ de sorte que $\vec{E'} = 2\frac{K}{R}\lambda(\sin\alpha)\,\vec{j}$.

– $x = r\sin(\theta)$ n'implique pas que $dx = r\cos(\theta)\,d\theta$ car r varie avec θ (il n'est pas constant).

Exercice II.6

Choisissez la réponse a ou b et justifiez.

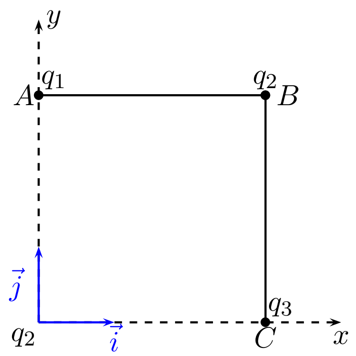
1. Une ligne de champ est une ligne où le vecteur champ est :
   a- perpendiculaire à cette ligne. b- Tangent à cette ligne.
2. Une ligne de champ est orientée dans le sens des potentiels :
   a- croissants. b- décroissants.
3. Une surface équipotentielle est une surface où le potentiel reste :
   a- constamment nul en tout point de cette surface. b- constant en tout point de cette surface.
4. Une ligne de champ est une ligne :
   a- de forme linéaire. b- de forme telle qu'elle traverse perpendiculairement les surfaces équipotentielles.
5. Un champ électrostatique uniforme est caractérisé par :
   a- des lignes de champ parallèles. b- des surfaces équipotentielles planes, parallèles et équidistantes.

Solution Exercice II.6

Pour chaque question, la réponse (b) est la bonne. Pour les justifications, voir les définitions et démonstrations du cours.

Exercice II.7

Soient trois charges q_1, q_2 et q_3 placées respectivement aux points $A(0,a)$, $B(a,a)$ et $C(a,0)$ du plan xOy.

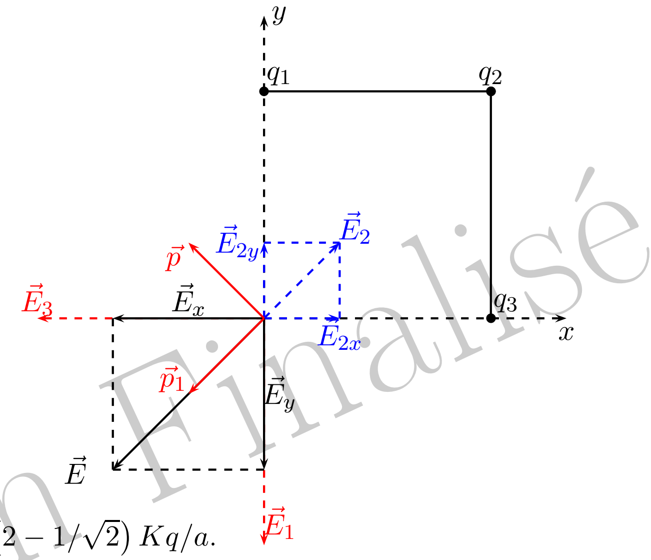


1. Calculer le potentiel électrique total au point $O(0,0)$.
2. Calculer les composantes E_x et E_y du champ électrique au point O.

3. En déduire le champ électrique total au point O. Représenter le vecteur . Échelle : $1cm \rightarrow 200V/m$.
4. On place au point O un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p} = 10^{-10}(-\vec{i} + \vec{j})\,\text{Cm}$.
   a) Déterminer le moment $\vec{\tau}$ du couple appliqué au dipôle.
   b) Représenter le dipôle dans sa position d'équilibre stable finale. Justifier cet état.
   c) Calculer la variation d'énergie potentielle du dipôle lorsqu'il passe de sa position initiale à sa position finale.
   $q_1 = q_3 = +q = 10^{-9}\,\text{C}$, $q_2 = -q$, $a = 10\,\text{cm}$.

Solution Exercice II.7

Distance $OB = \sqrt{2}a$. Angle $(\widehat{OC, OB}) = \alpha = \pi/4$.

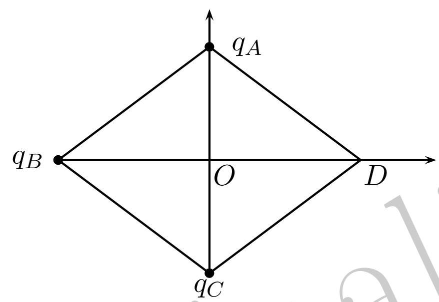


1) $V(O) = V_1 + V_2 + V_3 = V_3 = -\left(2 - 1/\sqrt{2}\right) Kq/a$.
2) $E_x = E_3 + E_{2x} = -Kq/a^2 + \left(Kq/2a^2\right)\cos(\pi/4) = -\left(1 - 1/\sqrt{8}\right) Kq/a^2$. Notez que $E_x < 0$.
$E_y = E_1 + E_{2y} = -Kq/a^2 + \left(Kq/2a^2\right)\sin(\pi/4) = -\left(1 - 1/\sqrt{8}\right) Kq/a^2$. Notez aussi que $E_y < 0$.
3) $\vec{E} = -\left(1 - 1/\sqrt{8}\right)\left(Kq/a^2\right)\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$ et $||\vec{E}|| = E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \left(\sqrt{2} - 1/2\right) Kq/a^2$
4) a) Soit $\vec{p} = p\left(-\vec{i} + \vec{j}\right)$ où $p = 10^{-10} C.m$. Les expressions vectorielles montrent que $\vec{E} \perp \vec{p}$ (voir schéma aussi)
$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E} \Rightarrow \tau = ||\vec{p}||||\vec{E}|| \sin\left(\vec{p}, \vec{E}\right) = ||\vec{p}||.||\vec{E}|| = p\left(2 - 1/\sqrt{2}\right) Kq/a^2$. Remarque $||\vec{p}|| = \sqrt{2}p$
La règle de la main droite montre que $\vec{\tau}$ est dans le sens de $\vec{k}$. Donc $\vec{\tau} = p\left(2 - 1/\sqrt{2}\right) Kq/a^2 \vec{k}$.
Vérifions par un calcul direct :
$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E} = \left[p\left(-\vec{i} + \vec{j}\right)\right] \wedge \left[-\left(1 - 1/\sqrt{8}\right)\left(Kq/a^2\right)\left(\vec{i} + \vec{j}\right)\right]$
$\vec{\tau} = -p\left(1 - 1/\sqrt{8}\right)\left(Kq/a^2\right)\left[\left(-\vec{i} + \vec{j}\right) \wedge \left(\vec{i} + \vec{j}\right)\right]$ rappel : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$.
$\vec{\tau} = -p\left(1 - 1/\sqrt{8}\right)\left(Kq/a^2\right)\left[\left(-\vec{i} \wedge \vec{j}\right) + \left(\vec{j} \wedge \vec{i}\right)\right] = p\left(2 - 1/\sqrt{2}\right)\left(Kq/a^2\right)\vec{k}$

b) La position d'équilibre stable est celle où $\vec{p}$ est parallèle à $\vec{E}$ (et dans le même sens). Dans ce cas $\vec{p}_1 = -p\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$ car $\left(1-1/\sqrt{8}\right) > 0$.
c) $E_p = -\vec{p}.\vec{E} = 0$ et $E_{p1} = -\vec{p}_1.\vec{E} = -\sqrt{2}p||\vec{E}|| = -p\left(2-1/\sqrt{2}\right)Kq/a^2$
$\Delta E_p = E_{p1} - E_p = E_{p1}$
Autre façon : $\Delta E_p = E_{p1} - E_p = \left(\vec{p}-\vec{p}_1\right).\vec{E}$
$\Delta E_p = 2p\vec{j}.\vec{E} = 2pE_y = -\left(2-1/\sqrt{2}\right)Kpq/a^2$

Exercice II.8

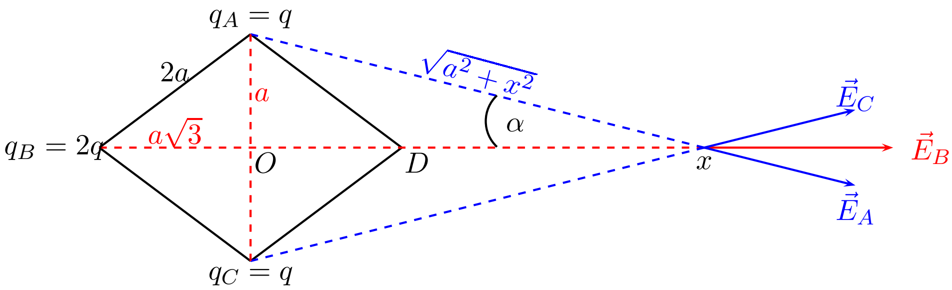
Deux charges ponctuelles q_A et q_C sont placées aux sommets A et C d'un triangle équilatéral ABC de côté $2a$.



1. Une troisième charge ponctuelle q_B est placée au sommet B du triangle.
   a) Calculer l'énergie potentielle de q_B au point B.
   b) Calculer l'énergie interne du système constitué par ces 3 charges.
2. Déterminer le potentiel électrique créé par les 3 charges au point D symétrique du point B par rapport à AC.
3. Une quatrième charge ponctuelle Q est ramenée de l'infini au point D.
   a) Déterminer l'énergie potentielle de cette charge au point D.
   b) Calculer le travail de la force électrostatique durant le déplacement de Q. Comparer au résultat de (3-a) et Commenter.
   A.N. : $a = 2mm$, $q_A = q_C = q$, $q_B = 2q$, $q = 1$pC, $Q = 1$nC, $AB = BC = AD = CD = 2a$.

Solution Exercice II.8

Les distances : $AB = BC = AC = 2a$ et $BO = DO = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$.



1-a) $E_p(q_B) = q_B V(B)$ et $V(B) = (q_A + q_C)K/2a = Kq/a$. Donc $E_p(q_B) = 2Kq^2/a$.

1-b) $U = (q_A q_B + q_A q_C + q_B q_C)K/2a = 5q^2 K/2a$

2) $V(D) = (q_A + q_C)K/2a + Kq_B/\left(2\sqrt{3}a\right) =. (Kq/a)\left(1 + 1/\sqrt{3}\right)$

3-a) $E_p(Q) = QV(D) = Q(q_A + q_C)K/2a + KQq_B/\left(2\sqrt{3}a\right) = (KqQ/a)\left(1 + 1/\sqrt{3}\right)$

3-b) $W_\infty^D(F) = \int_\infty^{x_D} \vec{F}.\vec{dl} = \int_\infty^{x_D} Q\vec{E}.\vec{dl} = -Q\int_\infty^{x_D} dV = -Q[V(D) - V(\infty)] = -E_p(D)$

Comparaison avec (3-a) :

Par définition, l'énergie potentielle d'une charge située en un point D est égale au travail de la résultante des forces électrostatiques pour un déplacement de cette charge du point D à un point de référence où le potentiel est nul (dans notre cas, c'est l'infini). Donc $E_p(D) = W_D^\infty(F) = -W_\infty^D(F)$

Autre Méthode de calcul de W (méthode directe) : en général $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

Calculons le champ qui est parallèle à l'axe Ox. En additionnant les composantes sur Ox créées par chaque charge, on obtient :

$E_x = E_{Ax} + E_{Cx} + E_{Bx}$

$E_x = Kq_A/\left(a^2 + x^2\right)\cos(\alpha) + Kq_C/\left(a^2 + x^2\right)\cos(\alpha) + Kq_B/\left(\sqrt{3}a + x\right)^2$ avec $\cos(\alpha) = x/\sqrt{a^2 + x^2}$

En additionnant les composantes sur Oy, on obtient :

$E_y = E_{Ay} + E_{By} = 0$

Donc

$\vec{E} = \left[K(q_A + q_C)x/\left(a^2 + x^2\right)^{3/2} + Kq_B/\left(\sqrt{3}a + x\right)^2\right]\vec{i}$

$= Kq\left[2x/\left(a^2 + x^2\right)^{3/2} + 2/\left(\sqrt{3}a + x\right)^2\right]\vec{i}$

$W_\infty^D(F) = KQq\int_\infty^{\sqrt{3}a}\left[2x/\left(a^2 + x^2\right)^{3/2} + 2/\left(\sqrt{3}a + x\right)^2\right]dx$. Posons $u = a^2 + x^2$ et $v = \sqrt{3}a + x$ avec $du = 2xdx$ et $dv = dx$. On aura alors :

$W_\infty^D(F) = KQq\left[\int_\infty^{4a^2} u^{-3/2}du + \int_\infty^{2\sqrt{3}a} 2v^{-2}dv\right] = -KQq/a\left(1 + 1/\sqrt{3}\right)$

Exercice II.9

Choisir la bonne réponse :

1. soit une charge q située à l'intérieur d'une surface fermée S. Le flux Φ qui traverse cette surface :

a) dépend de sa position.
b) est nul.
c) a pour expression $\Phi = q/\varepsilon_0$.
d) a pour expression $\Phi = q/(4\pi\varepsilon_0)$.

2. Soit une charge q, située à l'extérieur d'une surface fermée S. Le flux Φ qui traverse cette surface est donné par :
   a) $\Phi = q/\varepsilon_0$.
   b) $\Phi = q/2\varepsilon_0$.
   c) $\Phi = 0$.
3. Soit une sphère de rayon R, portant une charge volumique uniforme ρ. Le champ créé en un point M intérieur à la sphère ($r < R$) :
   a) se calcule à partir des charges contenues dans toute la sphère.
   b) se calcule à partir des charges contenues dans une sphère de rayon r.

Solution Exercice II.9

Les bonnes réponses sont : 1-c, 2-c et 3-b.

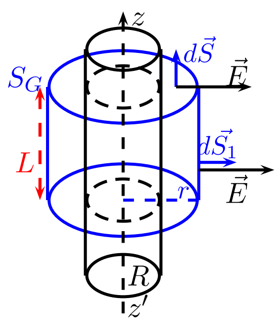
Exercice II.10

Une charge est uniformément répartie sur la surface d'un cylindre de longueur infinie et de rayon R. La densité de charge étant σ et l'axe de révolution étant $z'Oz$:

1. Calculer le champ électrique créé par ce cylindre.
2. En déduire le potentiel correspondant.

Solution Exercice II.10

1. Soit $z'Oz$ l'axe de révolution du cylindre. A cause de la symétrie, le champ électrique est perpendiculaire à cet axe et son module est constant sur tout cylindre coaxial de rayon r (coordonnées polaires du plan normal à $z'Oz$). Par conséquent, la surface de Gauss S_G sera choisie comme un cylindre de rayon r et de longueur L. Le champ étant perpendiculaire au vecteurs surface des deux bases du cylindre de Gauss, le flux à travers S_G sera égal au flux à travers la surface latérale S_1 :



$\Phi = \int_{S_G} \vec{E}.d\vec{S} = \int_{S_1} E.dS_1 = ES_1 = E\left(2\pi rL\right)$

$Q_{int} = \begin{cases} 0 & si \quad r < R \\ \sigma 2\pi RL & si \quad r > R \end{cases}$

Théorème de Gauss $\Phi = Q_{int}/\varepsilon_0 \Rightarrow E = \begin{cases} 0 & si \quad r < R \\ \sigma R/\varepsilon_0 r & si \quad r > R \end{cases}$

2. Le potentiel s'obtient par $dV = -\vec{E}.d\vec{l}$ avec $\vec{E} = E\vec{u}_r$ et $d\vec{l} = dr\vec{u}_r + ...$ Donc $dV = -Edr$ pour $r < R$, on trouve $V = C_1$ pour $r > R$, on trouve $V = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(r\right) + C_2$. Comme le potentiel vaut V_0 en $r = R$, on aura $C_1 = V_0$ et $-\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(R\right) + C_2 = V_0$. D'où $V = \begin{cases} V_0 & si \quad r \leq R \\ -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(r/R\right) + V_0 & si \quad r \geq R \end{cases}$

Remarque : Le champ semble discontinu en R ($E = 0$) juste à gauche et $E = \sigma/\varepsilon_0$ juste à droite). En réalité, il varie d'une manière continue mais rapide de 0 à σ/ε_0 sur un distance Δr négligeable.

Exercice II.11

On considère qu'un atome est constitué d'un noyau de rayon R_n entouré d'un nuage électronique de densité de charge :

$$\rho(r) = A/r^6$$

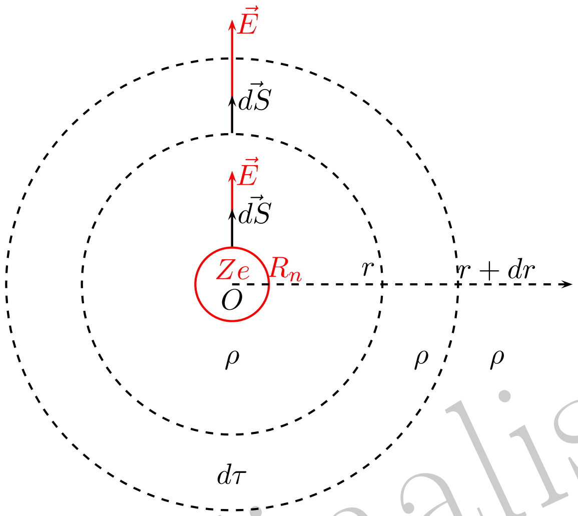
où r représente la distance entre le centre du noyau et un point de l'espace.

1. A l'intérieur du noyau, le champ électrique est radial et son intensité varie linéairement en fonction de r. Interpréter cette hypothèse.
2. En utilisant le fait que l'atome soit électriquement neutre, déterminer la valeur de la constante A.
3. Établir à l'aide du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$:
   a) juste à la surface du noyau ($r = R_n$).
   b) autour du noyau ($r > R_n$).
4. Représenter qualitativement la variation du champ électrique pour r variant de 0 à l'infini. En déduire la variation du potentiel $V(r)$.

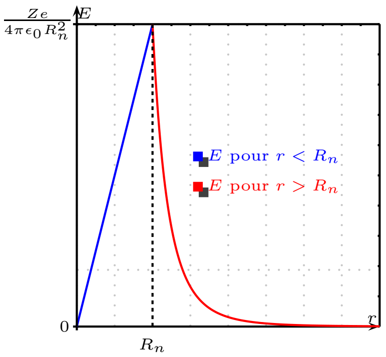
Solution Exercice II.11

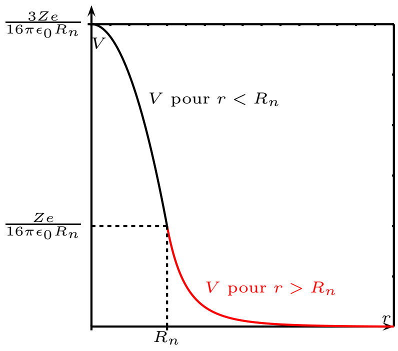
1. Le champ et radial parce que la distribution des charges a une symétrie sphérique. Il possède la variation linéaire car cette distribution est supposée uniforme (voir exemple de la sphère uniformément chargée en volume, dans le cours polycopié de l'USTHB).
2. La charge du noyau est Ze (dans la sphère de rayon R_n).
Les électrons peuvent être dans tout l'espace mais à l'extérieur de la sphère de rayon R_n. En choisissant l'élément de volume $d\tau$ entre deux sphères concentriques de rayons r et $r + dr$, on pourra le calculer de trois façons équivalentes (la première est la plus simple) :

$d\tau = S_r dr = 4\pi r^2 dr$ (surface de la sphère de rayon r multipliée par l'épaisseur dr)
$d\tau = S_{r+dr} dr = 4\pi\left(r+dr\right)^2 dr = 4\pi r^2 dr + 8\pi r dr^2 + 4\pi dr^3 = 4\pi r^2 dr$ (dr^2 et dr^3 sont négligeables car le calcul infinitésimal s'arrête au premier ordre)
$d\tau = V_{r+dr} - V_r = \frac{4}{3}\pi\left(r+dr\right)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi dr^3 + 4\pi r dr^2 + 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2 dr.$
Charge des électrons = $\int_{R_n}^{\infty} \rho\left(r\right) d\tau = 4\pi \int_{R_n}^{\infty} \frac{A\times r^2}{r^6} dr = 4\pi A \left[-\frac{1}{3r^3}\right]_{R_n}^{\infty} = \frac{4\pi A}{3R_n^3}$
Atome neutre (charge des électrons = - charge du noyau) :$\frac{4\pi A}{3R_n^3} = -Ze$, Donc : $A = \frac{-3ZR_n^3 e}{4\pi}$



3.a) Surface de Gauss en $R_n \Rightarrow \int_{S_G} \vec{E}.d\vec{S} = \int_{S_G} EdS = E\int_{S_G} dS = E4\pi R_n^2$
La charge à l'intérieur de cette surface est toute la charge du noyau $Q_{int} = Ze$.
Théorème de Gauss : $E4\pi R_n^2 = Ze/\varepsilon_0$, alors : $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{R_n^2}$
b) Surface de Gauss en r avec $r > R_n$: $\int_{S_G} \vec{E}.d\vec{S} = \int_{S_G} EdS = E\int_{S_G} dS = E4\pi r^2$
La charge à l'intérieur de la surface de Gauss se compose de la charge du noyau et de celle du nuage électronique situé entre R_n et r :
$Q_{int} = Ze + \int_{R_n}^{r} \rho\left(r\right) 4\pi r^2 dr = Ze + A\left[-\frac{4\pi}{3r^3}\right]_{R_n}^{r} = Ze + A\frac{4\pi}{3R_n^3} - A\frac{4\pi}{3r^3} = -A\frac{4\pi}{3r^3} = Ze\frac{R_n^3}{r^3}$
Théorème de Gauss : $E4\pi r^2 = Ze\frac{R_n^3}{\varepsilon_0 r^3}$, alors $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ZeR_n^3}{r^5}$
Remarque : pour $r < R_n$, on a $E = \alpha r$. Si l'on suppose la continuité du champ en R_n, cela nous permettra de déterminer α. On aura $\alpha R_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{R_n^2}$, la solution est $\alpha = \frac{1}{4\pi}\frac{Z}{R_n^3\varepsilon_0}e$. En résumé : $E = \begin{cases} \frac{ZeR_n^3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^5} & r \geq R_n \\ \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 R_n^3}r & r \leq R_n \end{cases}$





4. Le potentiel s'obtient par $dV = -\vec{E}.\vec{dl}$ avec $\vec{E} = E\vec{u}_r$ et $\vec{dl} = dr\vec{u}_r + ...$ Donc $dV = -Edr$
pour $r > R_n$ on trouve $V = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ZeR_n^3}{r^5}dr = \frac{Ze}{16\pi\varepsilon_0}\frac{R_n^3}{r^4} + C$. On choisit $C = 0$ car $V(\infty) = 0$. Donc $V(r) = \frac{Ze}{16\pi\varepsilon_0}\frac{R_n^3}{r^4}$.
Pour $r < R_n$ on trouve $V = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Zer}{R_n^3}dr = -\frac{1}{2}\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R_n^3} + C_1$. A cause de la continuité du potentiel, les deux expressions de V (pour $r > R_n$ et $r < R_n$) doivent donner la même valeur en $r = R_n$. C'est-à-dire : $V(R_n) = \frac{Ze}{16\pi\varepsilon_0}\frac{R_n^3}{R_n^4} = -\frac{1}{2}\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_n^2}{R_n^3} + C_1$ d'où $C_1 = \frac{3}{16\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{R_n}$. Ainsi, le potentiel est

$$V = \begin{cases} \frac{ZeR_n^3}{16\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^4} & r \geq R_n \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{R_n}\left(\frac{3}{4} - \frac{r^2}{2R_n^2}\right) & r \leq R_n \end{cases}$$

Troisième partie

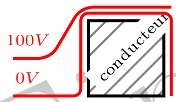
Conducteurs

Exercice III.1

Par temps normal, quand on s'élève verticalement à partir de la surface de la mer ou de celle d'un endroit désert et plat, le potentiel électrique augment d'environ 100 volts par mètre. Il y a ainsi un champ électrique vertical dont le sens indique l'existence d'une charge négative à la surface de la Terre. Cela signifie que, dehors, le potentiel à la hauteur de votre nez est supérieur d'environ 200 volts à celui qui existe au niveau de vos pieds. Cela pourrait suggérer de placer une paire d'électrodes à un mètre l'une au dessus de l'autre et d'utiliser la différence de potentiel de 100 volts pour alimenter des ampoules électriques. On pourrait également se demander pourquoi on ne reçoit pas de décharges électriques du fait de la d.d.p. de 200 V existant entre le niveau des pieds et celui du nez. Qu'en pensez-vous ?

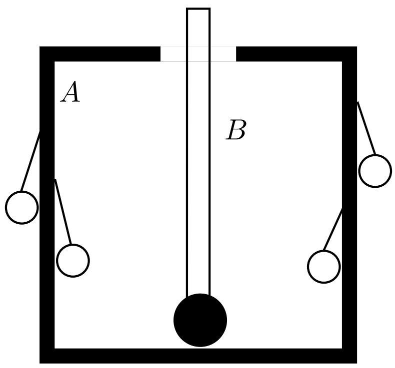
Solution Exercice III.1

Un conducteur quelconque (circuit d'une ampoule ou être humain) constitue un volume équipotentiel. Les lignes de champ et les équipotentielles de l'atmosphère se déforment en son voisinage pour que sa surface soit au même potentiel. Pour un corps humain, cette déformation est due à des charges négatives qui vont de la terre vers sa tête. Il n'y aura donc jamais de différence de potentiel entre la tête et les pieds du corps humain qui constitue un seul conducteur avec la terre.



Exercice III.2

De petits pendules métalliques sont fixés aux parois, intérieure et extérieure, d'un conducteur creux A initialement neutre. Un deuxième conducteur B, chargé, est introduit dans A en le tenant par un manche isolant et on réalise le contact.

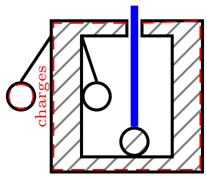


1. Représentez, qualitativement, les positions prises par les pendules avant et pendant le contact.

2. Obtient-on un résultat différent si on réalise le même travail sur la paroi extérieure du conducteur A ?

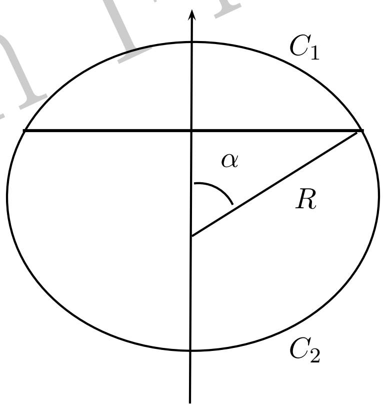
Solution Exercice III.2

Après contact sur la paroi externe ou interne, A et B constitueront un seul conducteur creux isolé. Les charges se répartiront sur la paroi externe et sur les pendules métalliques externes. Ces derniers s'écarteront de la paroi externe par répulsion de leurs charges de même signe que celles de la paroi. Les pendules internes non chargés restent en contact avec la paroi interne qui est neutre aussi. La démonstration se fait en choisissant une surface de Gauss à l'intérieur du conducteur A où le champ est nul. Le flux de ce dernier à travers cette surface et la charge à l'intérieur de celle-ci sont par conséquent nuls (voir le cours pour les détails).

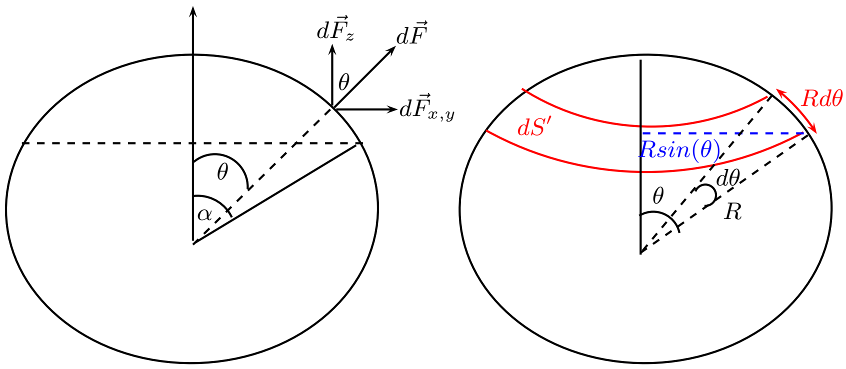


Exercice III.3

Une sphère métallique de rayon R est portée à un potentiel électrique V. Elle est constituée de deux calottes sphériques C_1 et C_2 (voir figure). Donner, en fonction de V et α, les résultantes des forces électrostatiques qui agissent sur les deux calottes.



Solution Exercice III.3



Le champ juste à l'extérieur d'un conducteur (normal à la surface) est $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Dans la surface chargée, le champ moyen est $E_m = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. La force appliquée à dq est $dF = dqE_m$. A cause de la symétrie, on calcule la composante sur Oz uniquement $dF_z = dF\cos\theta = dq\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\cos\theta$. Les charges qui se trouvent sur la surface dS' de la couronne comprise entre θ et $\theta + d\theta$ donnent la même valeur de dF_z. Par conséquent, on choisit $dq = \sigma dS'$ où $dS' = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ (comme pour un cylindre de hauteur $Rd\theta$ et de rayon $R\sin\theta$). Alors, $F_{1z} = \int dF_z = \int_0^\alpha \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\sigma^2\pi R^2}{2\epsilon_0}\sin^2\alpha$. Le potentiel d'un conducteur sphérique est $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$, donc $F_{1z} = \frac{1}{2}\pi\epsilon_0 V^2 \sin^2\alpha$. La force appliquée à toute la sphère est nulle (symétrie), par conséquent $F_{2z} = -F_{1z}$.

Remarque : En coordonnées sphériques, la méthode générale est de choisir $dq = \sigma dS$ où $dS = R^2 d\Omega = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Ainsi,

$$F_{1z} = \int_0^\alpha d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} R^2 \sin\theta\cos\theta$$

On obtient le même résultat car l'intégrant ne dépend pas de φ de sorte que $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$.

Exercice III.4

Soit une sphère conductrice, de rayon a, portant une charge Q.

1. Calculer son énergie interne.
2. On décharge cette sphère en la reliant à la terre par un fil conducteur. Que devient l'énergie préalablement emmagasinée ?
3. Cette sphère avait été chargée à l'aide d'un générateur de f.e.m. constante V. Quelle est l'énergie fournie par le générateur ? La retrouve-t-on sous forme d'énergie potentielle ? Expliquer.

Solution Exercice III.4

1. $U = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$. Pour un conducteur sphérique $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \implies C = 4\pi\epsilon_0 a$. D'où $U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$.
2. Cette énergie se dissipe entièrement sous forme de chaleur par effet Joule.

3. Le générateur a fourni l'énergie $W_0 = QV$. On retrouve la moitié sous forme d'énergie potentielle $U = \frac{1}{2}QV$. L'autre moitié a été perdue sous forme de chaleur durant la charge.

Exercice III.5

Soit une sphère conductrice A portée à un potentiel constant par rapport au sol, par l'intermédiaire d'un générateur (figure a).

1. Que doit-on supposer pour admettre que la charge est uniformément répartie sur la sphère ? Représenter qualitativement la répartition de la charge.
2. On approche de A un conducteur B neutre et isolé (figure b). Décrire de façon qualitative ce qui se passe sur les conducteurs A, B et dans le générateur pendant le rapprochement. Représenter qualitativement les répartitions des charges sur A et sur B :
   a) pour une distance donnée d.
   b) pour une distance infinie (préciser l'infini).

Les deux conducteurs étant immobiles et distants l'un de l'autre d'une longueur d, on relie B à la terre au moyen d'un fil conducteur (figure c).
Décrire qualitativement ce qui se passe. Représenter les nouvelles répartitions des charges, après le branchement. Comparer les charges portées par A dans les cas de figures a, b et c. Conclusion ?

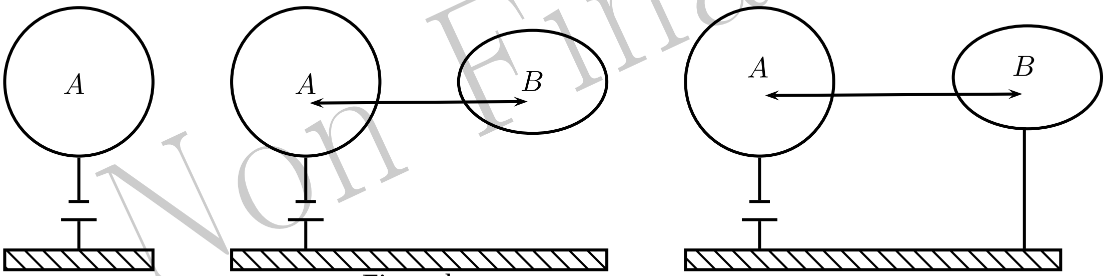


Figure a Figure b Figure c

3. On se propose maintenant de reprendre le problème précédent dans un cas particulier qui permet l'évaluation des charges et donc, une conclusion quantitative.
   - A est une sphère conductrice de rayon R_1, portée au potentiel V.
   - B est une sphère creuse, de rayons intérieur R_2 et extérieur R_3, concentrique à la sphère A. On donne : $V = 1000\,\text{V}$; $R_1 = 10\,\text{cm}$; $R_2 = 11\,\text{cm}$ et $R_3 = 20\,\text{cm}$.
   a) Calculer la charge Q_0 de A dans le cas de la figure d.
   b) Calculer la charge Q_1 de A dans le cas de la figure e et déterminer, en fonction de Q_1, les charges Q_2 et Q_3 portées par les deux faces de B. Exprimer, toujours en fonction de Q_1, les champs électriques $\vec{E}_e$ et $\vec{E}_i$ créés dans les régions : $r > R_3$, et $R_1 < r < R_2$, respectivement. En faisant circuler $\vec{E}_e$ et

$\vec{E}_i$ entre les bornes où ils sont définis, en déduire Q_1. Noter que $V_B = V_2(r = R_2) = V_3(r = R_3)$ et prendre égal à zéro le potentiel à l'infini et au sol.

c) Calculer la charge Q'_1 portée par A dans le cas de la figure f où B est relié au sol par un fil conducteur (utiliser la même méthode).

d) Comparer Q_0, Q_1 et Q'_1 ; en conclure. Sur quel paramètre et dans quel sens faudrait-il jouer pour augmenter Q'_1, V et R_1 gardant les mêmes valeurs ?

e) Décrivez qualitativement ce qui se passerait si, à partir des cas e et f, on reliait A et B par un fil conducteur. Quelle charge circulerait dans chacun des cas ? Faire le calcul numérique des charges et des potentiels finaux de A et B, de même que les énergies libérées dans chacun des cas.

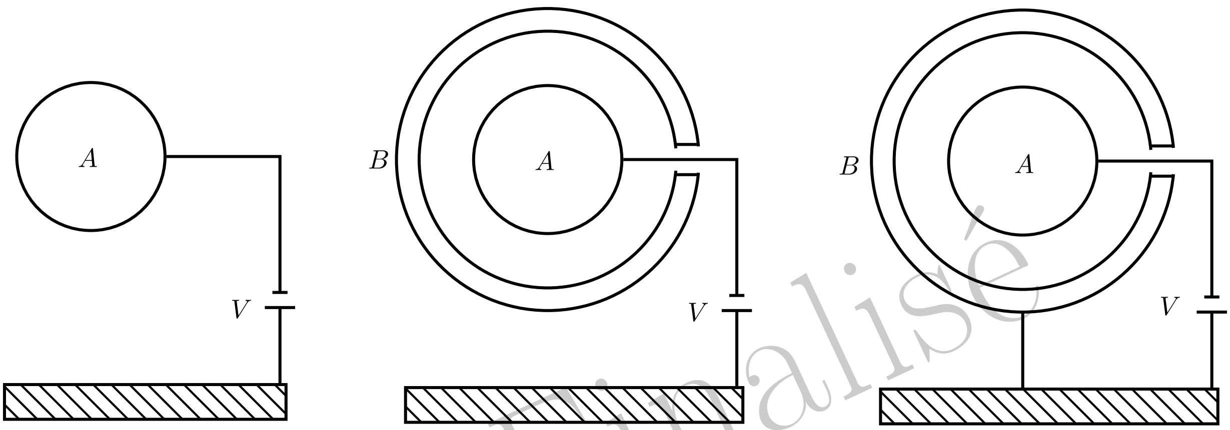


figure d figure e figure f

Solution Exercice III.5

1) Pour que la charge soit uniformément répartie sur la surface, il faut que cette dernière soit dépourvue de pointes et d'aspérités (voir pouvoir des pointes dans le cours). Cette charge est négative et répartie en surface.

2-a) Le conducteur A de charge Q crée un champ en son voisinage. Quand le conducteur neutre B est à une distance d de A, il ressent ce champ et ses charges positives $+|q|$ sont attirées par les charges négatives de A, alors que les charges négatives $-|q|$ sont repoussées (B reste neutre $+|q| - |q| = 0$). Les charges $+|q|$ de B créent un champs dans A plus grand que celui créé par les chargent $-|q|$, modifient le potentiel de A et attirent plus de charges négatives de A. Ces charges sont fournies par le générateur qui les transfère de la terre vers A pour garder le même potentiel V. La charge de A devient Q' avec $|Q'| > |Q|$. En chaque point de l'espace (y compris les conducteurs), le champ est la somme des champs créés par Q', $+|q|$ et $-|q|$: $\vec{E} = \vec{E}_{Q'} + \vec{E}_{+|q|} + \vec{E}_{-|q|}$. Ce processus de répartition des charges dans A et B s'arrête quand le champ $\vec{E}$ devient nul à l'intérieur de chaque conducteur qui sera donc en équilibre.

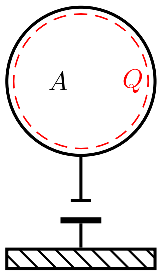


figure (a)

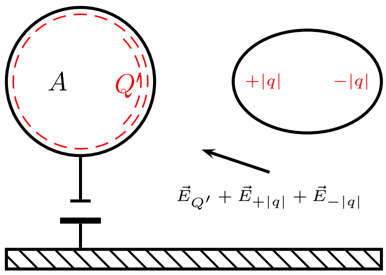


figure (b)

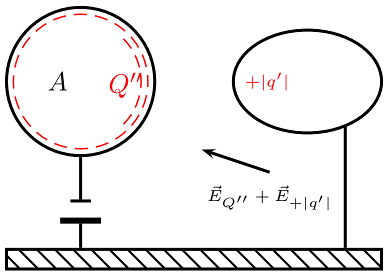


figure (c)

2-b) Si B est à l'infini, rien ne se passe car B ne ressent pas le champ créé par A (l'infini correspond en fait à une distance pour laquelle le champ créé par A est négligeable).
2-c) Si B est relié à la terre tout en étant à une distance d, ses charges négatives sur le côté opposé à A passent à la terre et le champ dans A augmente, ce qui nécessite d'avantage de charges négatives fournies par le générateur. La charge de A devient Q''.
En résumé, bien que le potentiel de A soit constant, sa charge augmente à cause du rapprochement de B puis augmente encore à cause du lien de B avec la terre ($|Q''| > |Q'| > |Q|$). La capacité de A a donc augmenté par influence de B.
3-a) $Q_0 = V_A C$ et $V_A = V$. Pour une sphère, $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V$ et $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ (voir le cours pour les détails).
3-b) C'est le cas d'une influence totale avec conservation de la charge de B qui est neutre, les relations du cours sont applicables : $Q_1 = -Q_2 = Q_3$. Pour calculer Q_1, il faut la lier au potentiel V_A (la seul donnée que l'on a). Le théorème de Gauss nous permet de calculer le champ en fonction de Q_1 puis l'intégrale du champ nous permettra alors de déduire le potentiel en fonction de Q_1.

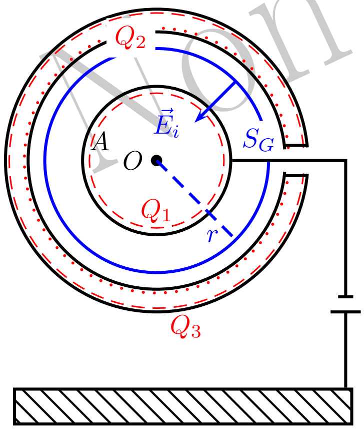


figure (e)

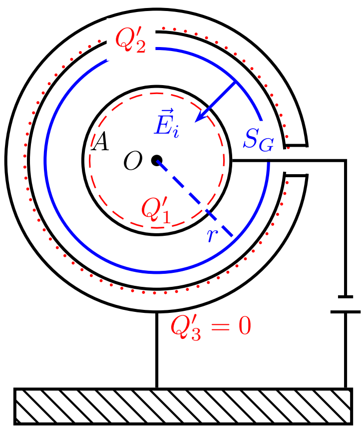


figure (f)

Calcul du champ : Par application du théorème de Gauss on détermine que le champ (radial à cause de la symétrie) vérifie : $E4\pi r^2 = Q_{int}/\varepsilon_0$ où r est le rayon de la surface de Gauss.
Pour $r > R_3$, on a $E = E_e$ et $Q_{int} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_1$ de sorte que $E_e = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$.

Pour $R_3 > r > R_2$, c'est l'intérieur du conducteur B et donc $E = 0$ (c'est ce qui nous a permis d'écrire $Q_1 = -Q_2$ car dans ce cas $Q_{int} = Q_1 + Q_2 = 0$).
Pour $R_2 > r > R_1$, on a $E = E_i$ et $Q_{int} = Q_1$ de sorte que $E_i = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$.
Pour $r < R_1$, c'est l'intérieur du conducteur A et donc $E = 0$.
Calcul du potentiel : $dV = -\vec{E}.d\vec{l} = -Edr$ (car $\vec{E} = E\vec{u}_r$). Par conséquent, $V(r) = -\int Edr$.
Pour $r > R_3$, on a $V(r) = V_e(r) = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r + C_e = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r$ (on choisit $C_e = 0$ car $V_e(\infty) = 0$)
Pour $R_3 > r > R_2$, on a $V(r) = V_B(r) = V_B$ (potentiel constant à l'intérieur de B). La continuité du potentiel en R_3 s'écrit $V_B(R_3) = V_e(R_3) \Rightarrow V_B = Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_3$.
Pour $R_2 > r > R_1$, on a $V(r) = V_i(r) = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r + C_i$. La continuité en R_2 donne $V_i(R_2) = V_B(R_2) \Rightarrow Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_2 + C_i = Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_3$. Par conséquent, $V_i = (Q_1/4\pi\varepsilon_0)[1/r + (1/R_3 - 1/R_2)]$
Pour $r < R_1$, c'est l'intérieur de A et

$$V(r) = V_A = V_i(R_1) = (Q_1/4\pi\varepsilon_0)[1/R_1 + 1/R_3 - 1/R_2]$$

Ainsi,

$$Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 + 1/R_3 - 1/R_2]$$

3-c) Le conducteur B et le sol constituent un seul conducteur ($V_B = 0$) et la charge à la surface externe de B passe au sol ($Q'_3 = 0$). Le même raisonnement conduit à :
Pour $r > R_3$, on a $E_e = 0$ car $Q_{int} = Q'_1 + Q'_2 + Q'_3 = Q'_1 + Q'_2 = 0$. Par conséquent, $V_e(r) = C_e$ comme $V_e(\infty) = 0$ (ou bien par continuité en R_3, $V_e(R_3) = V_B = 0$), alors $C_e = 0$.
Pour $R_2 > r > R_1$, on a $E_i = Q'_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$ et $V(r) = V_i = Q'_1/4\pi\varepsilon_0 r + C_i$. La continuité en R_2 donne $V_i(R_2) = V_B \Rightarrow Q'_1/4\pi\varepsilon_0 R_2 + C_i = 0$ ce qui permet de déduire $V_i = (Q'_1/4\pi\varepsilon_0)[1/r - 1/R_2]$.
Pour $r < R_1$, c'est l'intérieur de A et

$$V(r) = V_A = V_i(R_1) = \left(Q'_1/4\pi\varepsilon_0\right)[1/R_1 - 1/R_2]$$

Ainsi

$$Q'_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 - 1/R_2]$$

d) Réécrivons $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/(1/R_1)$, $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 - (1/R_2 - 1/R_3)]$ et $Q'_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_A/[1/R_1 - 1/R_2]$. Comme $1/R_2 >$
$(1/R_2 - 1/R_3) > 0$, on voit facilement que $|Q'_1| > |Q_1| > |Q_0|$ (on compare les valeurs absolues car V_A est négatif et donc les charges aussi). Pour augmenter Q'_1, il faut diminuer R_2 (Rapprocher les conducteurs A et B formant le condensateur).
Remarque : la capacité dans le cas (f) est $C = 4\pi\varepsilon_0/[1/R_1 - 1/R_2] = 4\pi\varepsilon_0 (R_1R_2)/[R_2 - R_1]$. On peut retrouver la capacité du condensateur plan comme limite où $d = R_2 - R_1 << R_1 \Rightarrow (R_1R_2) \approx R_1^2 \Rightarrow C \approx$

$4\pi\varepsilon_0 R_1^2/d = \varepsilon_0 S/d$.
e) Figure e : A et B constitueront un seul conducteur de potentiel V et de charge $Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 V R_3$ répartie sur la surface externe de B. La charge Q_1 passe de A vers B et la charge $Q_2 - Q_1$ fournie par le générateur passe de la terre vers B). L'énergie libérée est $\Delta U = U_f - U_i$ avec $U_f = Q_2 V/2$ et $U_i = Q_1 V/2$ donc $\Delta U = (Q_2 - Q_1) V/2$. On voit maintenant que c'est $(Q_2 - Q_1)$ qui a réellement circulé (en subissant une variation de potentiel). Le générateur a fourni $(Q_2 - Q_1) V$ dont la moitié a été dissipée sous forme de chaleur.

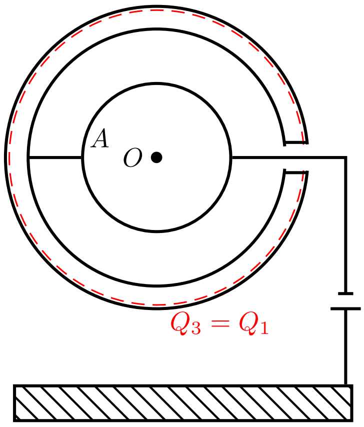


figure (e)

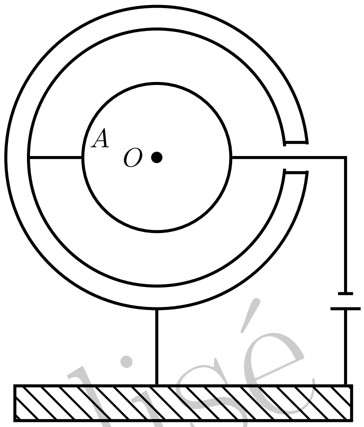


figure (f)

Figure f : Premier cas (A est isolé du générateur avant de le relier à B) : Après l'isolement, $V = V_A$ et rien ne change. Après le lien entre A et B, toute la charge Q'_1 circule de A vers B pour neutraliser la charge $Q'_2 = -Q'_1$. La charge et le potentiel deviennent nuls à la fin. Comme le potentiel de B était déjà nul, on a $U_i = (1/2)\, Q'_1 V_A + (1/2)\, Q'_2 V_B = (1/2)\, Q'_1 V$ et $U_f = 0$. Donc $\Delta U = -\,(1/2)\, Q'_1 V$. Elle est libérée sous forme chaleur (effet Joule).
Deuxième cas (A reste lié au générateur) : Si le générateur est idéal (fournit un potentiel constant V), la charge circulerait en permanence dans le circuit fermé terre, générateur, A et B. L'équilibre n'est jamais atteint ce qui ne correspond pas aux conditions de ce cours. Par contre, un générateur réel s'épuise et tous les potentiels et toutes les charges deviennent nuls à la fin. Tout se passe comme si la charge Q'_1 a circulé de A vers B. Le générateur passe de l'énergie U_G à 0. L'énergie libérée est $\Delta U = U_f - U_i$ avec $U_f = 0$ et $U_i = (1/2)\, Q'_1 V + U_G$, donc $\Delta U = -\,(1/2)\, Q'_1 V - U_G$. Remarquons que si le conducteur a une résistance nulle, il s'agira alors d'un court-cricuit.

Exercice III.6

On considère un condensateur idéal, constitué de deux conducteurs plans, de surfaces S et distants de e_0. On applique une d.d.p. V_0 entre ses armatures.

1. Calculer :
   a) la charge Q du condensateur ;
   b) l'énergie potentielle emmagasinée ;
   c) la force agissant sur chacune des armatures.
2. On isole le condensateur de la source. Une des armatures étant fixe, on approche l'autre jusqu'à e_1 ($e_0 > e_1$), (figure I).
   Expliquer, qualitativement, les phénomènes qui se produisent au cours de ce déplacement (transport de charge, variation de potentiel, de capacité,........)
   Montrer, à travers un bilan précis, que le principe de conservation de l'énergie est vérifié.
3. On réalise maintenant le même déplacement tout en gardant le générateur branché au condensateur (figure II). Mêmes questions que précédemment (ne pas oublier de tenir compte, dans le bilan, de l'énergie mise en jeu dans le générateur)
4. Refaire les bilans d'énergie du 2°) et du 3°) dans le cas d'un déplacement de e_0 à e_1 lorsque $e_0 < e_1$.

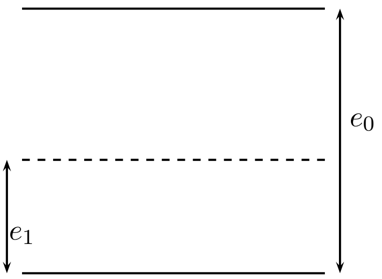


Figure I

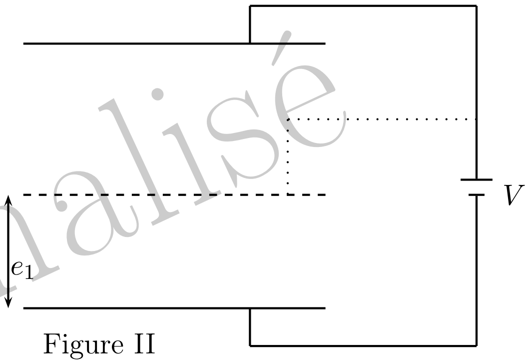


Figure II

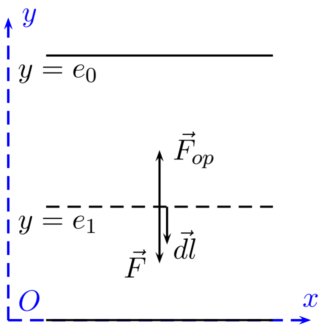
Solution Exercice III.6

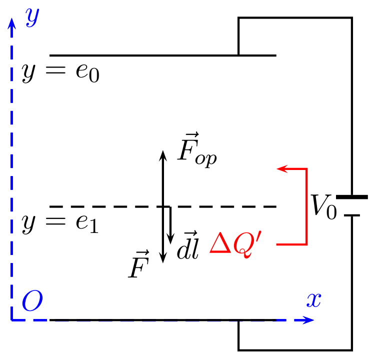
1-a) $Q = C_0 V_0$ avec $C_0 = (\varepsilon_0 S/e_0)$. Rappel : $V_0 = Ee_0$ et $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/S\varepsilon_0 \Rightarrow Q = (S\varepsilon_0/e_0)\,V_0$.
1-b) C'est l'énergie interne $U = QV_0/2 = Q^2/2C_0 = (1/2)\,C_0 V_0^2$
1-c) C'est la force moyenne $F = QE_m$ où $E_m = -\sigma/2\varepsilon_0 = -Q/2S\varepsilon_0$. Donc, $F = -Q^2/2S\varepsilon_0$. On retrouve le même résultat avec la relation $F = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_Q$ avec $C_0 = \varepsilon_0 S/y$ (voir la fin du cours sur les conducteurs).
2-a) Explication : Quand un opérateur ($\vec{F}_{op}$) déplace une armature, la charge sur chaque armature (isolée électriquement) est conservée et la capacité doit augmenter car l'influence augmente par rapprochement. Le potentiel doit diminuer. La relation $Q = C_1 V_1$, où $C_1 = (\varepsilon_0 S/e_1)$, montre que la différence de potentiel doit diminuer ($V_1 = (e_1/e_0)\,V_0$).

$e \searrow$	$C = \varepsilon_0 S/e \nearrow$	$Q = C^{te}$	$V = Q/C \searrow$	$U = Q^2/2C \searrow$	$F = Q^2/2\varepsilon_0 S = C^{te}$

2-b) Bilan d'énergie :
Variation de l'énergie interne $\Delta U = Q^2/2C_1 - Q^2/2C_0 = \left(Q^2/2S\varepsilon_0\right)(e_1 - e_0)$. Le condensateur cède de l'énergie car $\Delta U < 0$.

Travail des forces électrostatiques de l'armature qui s'est déplacée : la force $F = -Q^2/2S\varepsilon_0$ est constante de sorte que $W = F\,(e_1 - e_0) = \left(Q^2/2S\varepsilon_0\right)(e_0 - e_1)$.





On voit bien que $\Delta U = -W$ ce qui correspond bien à la définition de l'énergie interne. L'énergie perdue par le condensateur est récupérée par le milieu extérieur (voir remarque b à la fin de l'exercice).

3-a) Explication : cette fois, c'est la différence de potentielle qui est maintenue constante par le générateur. La capacité augmente par augmentation de l'influence (rapprochement) et la charge aussi car les armatures ne sont pas isolées électriquement. $Q_1 = C_1 V_0$.

$e \searrow$	$C = \varepsilon_0 S/e \nearrow$	$V = C^{te}$	$Q = VC \nearrow$	$U = V^2C/2 \nearrow$	$F = Q^2/2\varepsilon_0 S \nearrow$

3-b) Bilan d'énergie :

Variation de l'énergie interne : $\Delta U = \left(C_1 V_0^2/2\right) - \left(C_0 V_0^2/2\right) = \left(V_0^2 S\varepsilon_0/2\right)(1/e_1 - 1/e_0)$. Le condensateur reçoit de l'énergie car $\Delta U > 0$.

Énergie fournie par le générateur : $U_{\Delta Q} = V_0\,(Q_1 - Q_0) = V_0^2\,(C_1 - C_0) = \left(V_0^2 S\varepsilon_0\right)(1/e_1 - 1/e_0)$. La charge positive ΔQ passe de la borne négative à la borne positive à travers le générateur. Elle voit son potentiel augmenter de V_0 et son énergie potentielle augmenter de $U_{\Delta Q}$. Cette dernière est l'énergie fournie par le générateur.

Travail des forces électrostatiques de l'armature qui s'est déplacée : Pour chaque position y de l'armature, on a $Q = V_0 C$ avec $C = \varepsilon_0 S/y$. La force $F = -Q^2/2S\varepsilon_0 = -\left(S\varepsilon_0/2y^2\right)V_0^2$ varie donc avec la distance y entre les deux armatures (On retrouve le même résultat avec la relation $F = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_V$). Le travail est alors $W = \int_{e_0}^{e_1} F dy = -\int_{e_0}^{e_1}\left(S\varepsilon_0/2y^2\right)V_0^2 dy = \left(V_0^2 S\varepsilon_0/2\right)(1/e_1 - 1/e_0)$. Comme dans le cas précédent, ce travail positif correspond à une perte d'énergie du condensateur récupérée par le milieu extérieur.

On voit que $\Delta U = U_{\Delta Q} - W$: Lors du déplacement, le condensateur reçoit l'énergie fournie par le générateur et cède de l'énergie au milieu extérieur. La variation totale de son énergie est égale à la somme des deux variations.

4) Dans ce cas, on retrouve évidemment les mêmes résultats changés de signe.

Générateur débranché : $\Delta U = -W > 0$. Le condensateur reçoit de l'énergie cédée par le milieu extérieur.

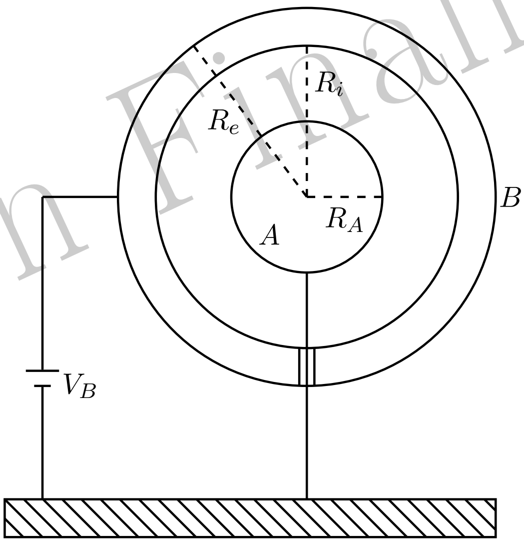
Générateur branché : $\Delta U = U_{\Delta Q} - W$ avec $\Delta U = \left(V_0^2 S\varepsilon_0/2\right)(1/e_0 - 1/e_1) < 0$, $U_{\Delta Q} = \left(V_0^2 S\varepsilon_0\right)(1/e_0 - 1/e_1) < 0$ et $W = \left(V_0^2 S\varepsilon_0/2\right)(1/e_0 - 1/e_1) < 0$. Le condensateur reçoit l'énergie W du milieu extérieur mais ne la

garde pas et la transfère au générateur. De plus, il cède l'énergie ΔU au générateur. Ce dernier reçoit donc $U_{\Delta Q} = \Delta U + W$.
Remarques : a) $U_{\Delta Q} = -V_0\,(Q_1 - Q_0)$ car la charge positive $\Delta Q = (Q_1 - Q_0)$ passe de l'armature positive à l'armature négative (le condensateur se décharge par diminution de l'influence à potentiel constant).
b) En général, on parle d'énergie cédée au milieu extérieur par le condensateur si $W > 0$ car $\Delta U = -W < 0$), et d'énergie reçue du milieu extérieur si $W < 0$ ($\Delta U > 0$). Le milieu extérieur peut être vu comme un opérateur qui applique une force égale et opposée à la force électrostatique (car l'armature doit se déplacer à une vitesse constante très faible).

Exercice III.7

Une sphère A, reliée au sol, est placée au centre d'une coquille sphérique B portée à un potentiel V_B par rapport au sol (voir figure ci-dessous).

1. Donner les expressions du champ et du potentiel électriques :
   a) dans la région comprise entre les deux sphères ($R_A < r < R_i$) ;
   b) à l'extérieur de B ($r > R_e$).
2. Trouver les expressions des charges portées par les surfaces intérieure et extérieure de la sphère B.



Solution Exercice III.7

1.a. Pour $R_A < r < R_i$, on a $E_a(r) = K\frac{Q_A}{r^2}$ par application du théorème de Gauss à la sphère A (voir cours). Donc $V_a(r) = K\frac{Q_A}{r} + C_A$. La constante se détermine par $V_a(R_A) = K\frac{Q_A}{R_A} + C_A = 0$ (A est liée à la terre). Donc $V_a(r) = KQ_A(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_A})$
1.b. Pour $r > R_e$, on a $E_b(r) = K\frac{Q}{r^2}$ et $V_b(r) = K\frac{Q}{r} + C_B$, où $C_B = 0\,\mathrm{V}$ car $V_b(\infty) = 0\,\mathrm{V}$, et $Q = Q_A + Q_i + Q_e = Q_e$ à cause de l'influence totale ($Q_i = -Q_A$).

2. On a deux équations $V_a(R_i) = V_B$, $V_b(R_e) = V_B$

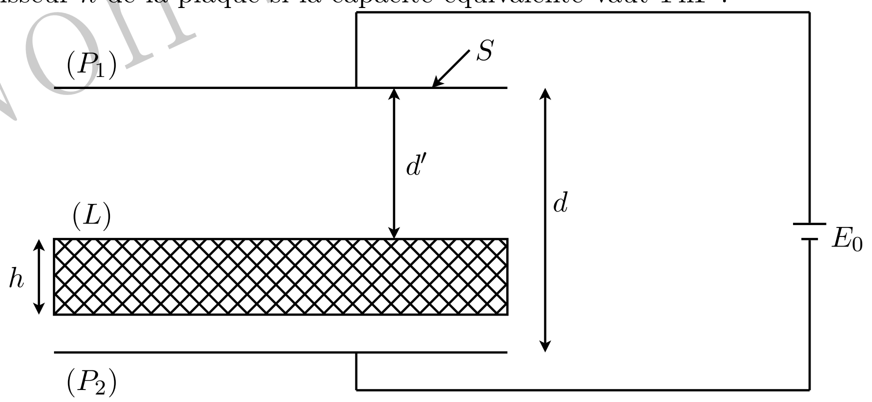
$$KQ_A\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_A}\right) = V_B \quad (1)$$
$$K\frac{Q_e}{R_e} = V_B \quad (2)$$

Par conséquent, $Q_A = -\frac{V_B}{K}\frac{R_iR_A}{(R_i - R_A)} = -Q_i$ et $Q_e = \frac{V_BR_e}{K}$. Remarque : la charge totale de B est passée de $0\,\mathrm{C}$ à $Q_B = Q_i + Q_e = \frac{V_B}{K}\frac{R_iR_A + R_iR_e - R_AR_e}{(R_i - R_A)} \neq 0\,\mathrm{C}$. Elle n'a pas été conservée car B n'est pas isolé.

Exercice III.8

Soit un condensateur plan idéal formé par deux armatures (P_1) et (P_2) conductrices de surfaces $S = 226\,\mathrm{cm}^2$ et séparées par du vide d'épaisseur $d = 0.3\,\mathrm{mm}$.

1. Le condensateur est branché à un générateur de f.e.m $E_0 = 120\,\mathrm{V}$.
   a) Retrouver l'expression de la capacité du condensateur et la calculer.
   b) Calculer la charge portée par chaque armature ainsi que l'énergie emmagasinée.
   c) Déterminer les forces qui s'exercent sur les armatures.
2. On introduit parallèlement entre les armatures une plaque conductrice (L), neutre, de même dimensions et d'épaisseur h (figure ci-dessous). Le générateur étant branché :
   a) Expliquer qualitativement ce qui se passe et représenter la nouvelle répartition des charges.
   b) Donner l'expression de la capacité équivalente du système.
   c) Quelle est l'épaisseur h de la plaque si la capacité équivalente vaut $1\,\mathrm{nF}$?



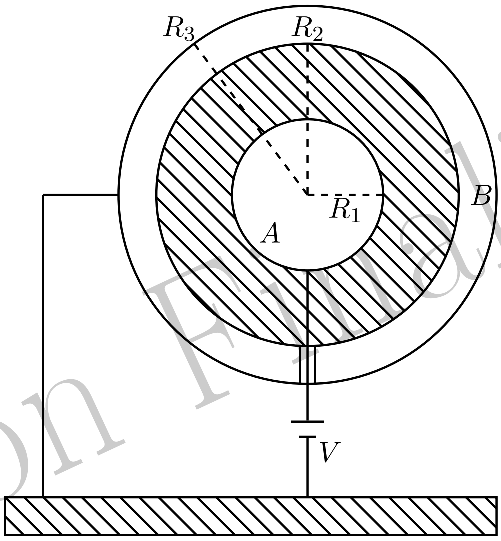
Solution Exercice III.8

1.a. Chaque armature est considérée comme un plan infini qui crée un champ constant $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ où $Q = \sigma S$. Le champ dû aux deux armatures est $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$. La différence de potentiel est donc $E_0 = V = Ed = \frac{dQ}{S\epsilon_0}$ (attention : ne pas confondre la fem E_0 et le champ E). La capacité est $C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0\frac{S}{d}$, A.N. $C = 66.61\,\mathrm{nF}$.

1.b. $Q = CE_0$, $U = \frac{1}{2}CE_0^2$.
1.c. C'est la force moyenne $F = QE_m$ où $E_m = \sigma/2\varepsilon_0 = Q/2S\varepsilon_0$. Donc, $F = Q^2/2S\varepsilon_0$.
2.a. La plaque est en influence (totale). La charge $-Q$ se déplace vers la surface en face de P_1 et la charge Q vers la surface en face de P_2.
2.b. On a deux condensateurs en série de capacités $C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d'}$ et $C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{(d-d'-h)}$. La capacité équivalente est $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{\epsilon_0}{S(d-h)}$, d'où $C_{eq} = \frac{S(d-h)}{\epsilon_0}$.
3.b. $h = d - \frac{\epsilon_0 C_{eq}}{S}$

Exercice III.9

La figure ci-dessous représente un condensateur sphérique formé de deux conducteurs A (de rayon R_1) et B (de rayons R_2 et R_3) séparés par un milieu isolant de permittivité ε et résistivité ρ.



1. Représenter la répartition de charge sur les conducteurs A et B.
2. Déterminer le champ électrique à l'intérieur du condensateur ($R_1 \leq r \leq R_2$).
3. Trouver l'expression de la différence de potentielle entre les deux conducteurs.
4. Déduire la capacité de ce condensateur.

Solution Exercice III.9

1. L'influence totale implique $Q(R_1) = Q$ et $Q(R_2) = -Q$. Conservation de la charge de B (supposé neutre) : $Q(R_2) + Q(R_3) = 0$. Donc $Q(R_3) = Q$.
2. $\vec{E}(r) = \vec{E}_A(r) + \vec{E}_B(r)$ avec $\vec{E}_A(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$ (Théorème de Gauss pour l'extérieur de A) et $\vec{E}_B(r) = \vec{0}$ (intérieur de B). Donc $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}$.

3. $dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E(r)dr$. Donc $V_B - V_A = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$.
4. $|V_B - V_A| = \frac{|Q|}{C} \implies C = 4\pi\varepsilon\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

Exercice III.10

Partie I

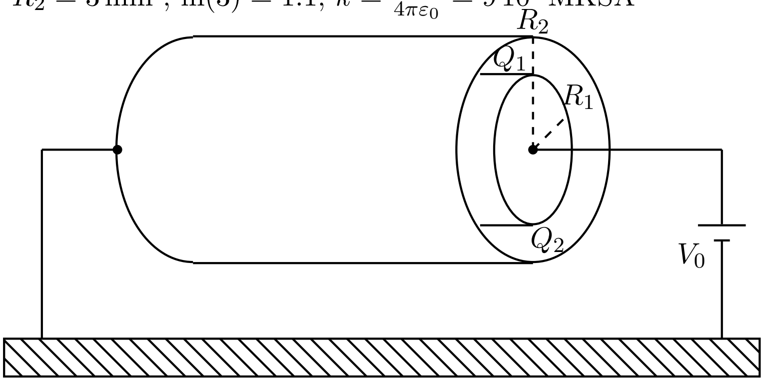
Un conducteur de forme quelconque homogène, en équilibre électrostatique, porte une charge Q.

1. Que vaut le champ électrique à l'intérieur de ce conducteur ?
2. Que vaut le potentiel électrique à l'intérieur de ce conducteur ?
3. Où est située la charge Q ?

Partie II

Nous disposons maintenant d'un câble coaxial, cylindrique, constitué de deux cylindres conducteurs infiniment longs, d'axe Oz, séparés par le vide. Le premier est plein de rayon R_1, de potentiel V_0 et porte une charge Q_1. Le second est creux, de rayon R_2 est relié au sol (voir figure).

1. Quel est le signe de Q_1 ?
2. L'ensemble étant à l'équilibre, quelle est la charge Q_2 de la face interne du cylindre externe.
3. Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, la direction, le sens et le module du champ électrique entre les deux conducteurs ($R_1 < r < R_2$).
4. a) En utilisant la circulation du champ électrique ($dV = -\vec{E}.\vec{dl}$), donner l'expression de la charge Q_1.
   b) Déduire l'expression de la capacité du câble coaxial.
   c) Calculer cette capacité par unité de longueur.
   A.N : $R_1 = 1\,\text{mm}$, $R_2 = 3\,\text{mm}$, $\ln(3) = 1.1$, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\,10^9$ MKSA



Solution Exercice III.10

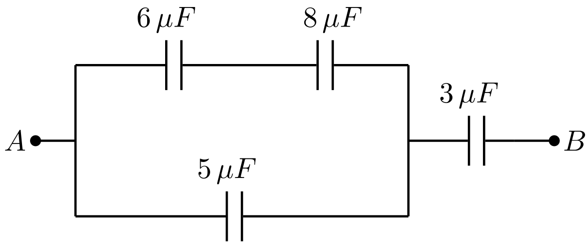
I. Voir cours.

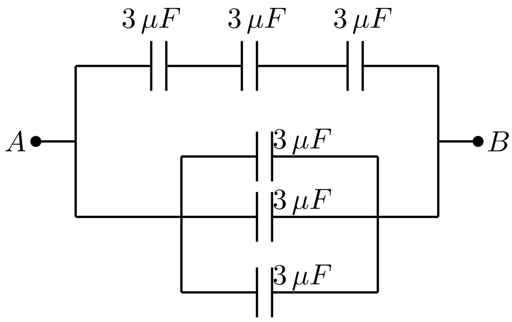
II. Indication voir exercice II.10

Exercice III.11

Soient deux associations de condensateurs représentées sur la figure ci-dessous.

1. Calculer les capacités équivalentes aux deux associations.
2. Dans chacun des cas, on applique entre A et B une d.d.p. de 1000 V puis on débranche la source et on réalise un court-circuit entre A et B. Calculer la quantité de charge qui a circulé et l'énergie libérée durant cette opération.





Solution Exercice III.11

Schéma de gauche : $C_1 = \frac{6*8}{6+8} + 5 = \frac{59}{7}\,\mu\mathrm{F} = 8.43\mu F$ et $C_{eq} = \frac{\frac{59}{7}*3}{\frac{59}{7}+3} = \frac{177}{80}\,\mu\mathrm{F} = 2.21\,\mu\mathrm{F}$.
Dans les deux cas la charge qui a circulé et l'énergie libérée sont celles du condensateur équivalent, $Q = C_{eq}V$ et $U = \frac{1}{2}C_{eq}V^2$.

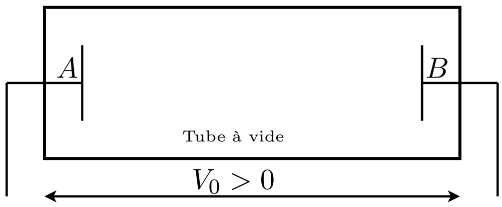
Quatrième partie

Courants Continus

Exercice IV.1

Partie I — Déplacement des électrons dans le vide

Dans un tube à vide se trouve deux plaques parallèles A et B, soumises à une différence de potentiel positif V_A–V_B = V_0 (voir figure ci-dessous). On considère que les électrons quittent la plaque B par effet thermoélectrique avec une vitesse supposée nulle.



1. Quelle est la nature du mouvement des électrons ?
2. Donner l'énergie cinétique des électrons lorsqu'ils atteignent A.

Partie II — Déplacement des électrons dans un milieu conducteur ; Loi d'Ohm

1. On considère un conducteur homogène de forme cylindrique et de section S. On soumet les deux extrémités A et B du cylindre à une d.d.p. V_0. On constate que le conducteur est traversé par un courant électrique d'intensité I donnée par : $I = V_0/R$ où R est une constante caractéristique du conducteur appelée résistance.
   a) Représenter les lignes de courant et montrer que le vecteur densité de courant est constant.
   b) Établir la relation qui lie le vecteur densité de courant au vecteur champ électrique .
   c) En déduire le vecteur vitesse de dérive des électrons dans le conducteur.
   d) Comparer au résultat obtenu dans la partie I.

Partie III — Déplacement des électrons dans un milieu conducteur ; Loi de Joule

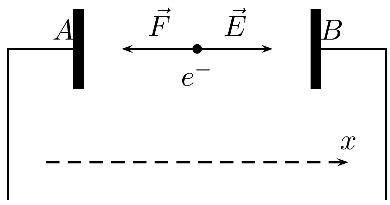
1. Lors de leur déplacement dans un conducteur, les électrons, de vitesse $\vec{v}$, sont soumis à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$, où k représente une constante caractéristique du matériau conducteur.
   a) Établir l'équation différentielle du mouvement des électrons soumis à la force électrique et la force de frottement.
   b) Vérifier que la fonction : $v = v_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$, est solution de l'équation précédente. Déterminer la vitesse limite v_{lim} et la constante de temps τ en fonction du champ électrique E, de la masse m de l'électron, de sa charge électrique e et du coefficient k.
   c) Déterminer le travail de la force de frottement lorsque l'électron se déplace de B à A. Sous quelle forme d'énergie se retrouve-t-il ?

d) Quelle est la puissance calorifique dégagée dans le conducteur lorsqu'il est parcouru par un courant I.

Solution Exercice IV.1

I) Déplacement des électrons dans le vide :

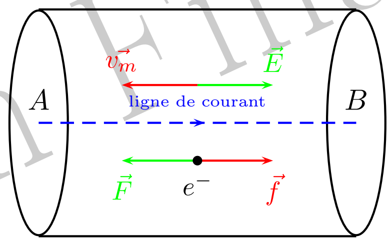
1) Les électrons sont soumis à la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$ où $q = -e$. Le poids des électrons est négligeable. Leur mouvement est donc accéléré de B vers A avec une accélération $\vec{a} = (q/m)\vec{E}$. Sachant que le champ est constant, on a $E = V_0/L$ et $a = -(eV_0/mL)$ où $L = AB$.



2) La force $\vec{F} = -q\vec{\nabla}V$ dérive d'un potentiel. Par conséquent, l'énergie totale de l'électron se conserve $E_T(B) = E_T(A)$ et nous avons

$E_c(A) + qV_A = E_c(B) + qV_B \Rightarrow E_c(B) = eV_0$ car $E_c(A) = 0$, $q = -e$ et $V_A - V_B = V_0$.

II) Déplacement des électrons dans un milieu conducteur. Loi d'Ohm :



1) Une ligne de courant d'une charge positive est dirigée du potentiel le plus élevé vers potentiel le plus bas. L'homogénéité du cylindre implique que ces lignes sont des droites parallèles à l'axe du cylindre.

2) Comme j et le champ E sont constants, la loi d'Ohm $V = RI$ peut s'écrire $EL = RjS$. D'où $j = (L/RS)E = \sigma E$. Cette relation s'écrit sous forme vectorielle, $\vec{i} = \sigma\vec{E}$ car la densité de courant et le champ ont la même direction et le même sens (la conductivité $\sigma = (L/RS)$ est l'inverse de la résistivité $\rho = 1/\sigma$).

3) On sait que $\vec{j} = -en\vec{v}$. Donc $-en\vec{v} = \sigma\vec{E}$, on trouve $\vec{v}_m = -(\sigma/ne)\vec{E} = -(L/RSne)\vec{E}$.

4) La vitesse v_m est constante dans un conducteur alors qu'elle augmente uniformément dans le vide.

III) Déplacement des électrons dans un milieu conducteur. Loi de Joule :

1) $\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$ où $\vec{F} = -e\vec{E}$ et $\vec{f} = -k\vec{v}$. Le mouvement étant rectiligne, la projection donne :

$-eE - kv = mdv/dt$ soit $dv/dt + kv/m = (-e/m)E$.

2) $dv/dt + (k/m)\,v = (v_{\lim})\,[(1/\tau) - (k/m)]\,[\exp(-t/\tau)] + (k/m)\,(v_{\lim}) = (-e/m)\,E$. L'égalité doit être vérifiée quelque soit le temps t. Le coefficient multiplié par l'exponentielle doit s'annuler ainsi que le terme indépendant du temps : $[(1/\tau) - (k/m)] = 0$ et $(k/m)\,(v_{\lim}) = (-e/m)\,E$. On en déduit que $\tau = m/k$ et $v_{\lim} = -(e/k)\,E$.
3) $\vec{f}$ est la seule force non conservative. Donc, $W_B^A\left(\vec{f}\right) = E_T(A) - E_T(B)$. Avec $E_T(A) = \frac{1}{2}mv_{\lim}^2 - eV_A$ et $E_T(B) = -eV_B$, d'où $W_B^A\left(\vec{f}\right) = \frac{1}{2}mv_{\lim}^2 - eV_0 = \frac{1}{2}m\left(e^2/k^2\right)E - eEL \simeq -eEL$. Ce travail se retrouve sous forme de chaleur (effet Joule).
Autres méthodes de calcul de $W_B^A\left(\vec{f}\right)$:
a) $W_B^A\left(\vec{f}\right) = \int_B^A -kvdx \simeq -kv_{\lim}(x_A - x_B) = -eEL$ car $v_{\lim}$ est très rapidement atteinte (sur une très petite longueur) ce qui est négligeable dans l'intégrale de A à B (régime transitoire négligeable).
b) $W_B^A\left(\vec{f}\right) = \int_B^A -kvdx = \int_{t_B}^{t_A} -kv\frac{dx}{dt}dt = \int_{t_B}^{t_A} -kv^2dt = -kv_{\lim}^2\int_0^{\frac{L}{v_{\lim}}}(1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau})dt$ car $t_B = 0\,\mathrm{s}$ et $t_A \simeq \frac{L}{v_{\lim}}$.
Remarque
En toute rigueur, on détermine t_A par $L = x_A - x_B = \int_0^{t_A} vdt = v_{\lim}\int_0^{t_A}(1 - e^{-t/\tau})dt = v_{\lim}\left[t_A + \tau(1 - e^{-t_A/\tau})\right]$. Cette équation est difficile mais elle montre que $L \simeq v_{\lim}t_A$ car $t_A \gg \tau > \tau(1 - e^{-t_A/\tau})$.
4) $W_B^A\left(\vec{f}\right)$ est l'énergie calorifique dégagée par une seule charge dans le conducteur en un temps $T = -L/v_{\lim}$. En ce temps N charges parcourent le conducteur avec $N = IT$. L'énergie dégagée par toutes ces charges est $W(N) = |NW_B^A\left(\vec{f}\right)|$ et la puissance est $P = |NW_B^A\left(\vec{f}\right)/T|$. Soit $P = eELI$.

Exercice IV.2

Un conducteur cylindrique en cuivre, de section $S = 1\,\mathrm{mm}^2$ et de longueur $L = 10\,\mathrm{m}$, est parcouru par un courant constant de $5\,\mathrm{A}$.

1. Calculer le module du vecteur densité de courant.
2. Calculer le nombre d'électrons libres par unité de volume sachant qu'un atome de cuivre libère un électron.
   On donne : La masse atomique du cuivre $M = 64\,\mathrm{g}$, sa masse volumique $\rho_{Cu} = 8900\,\mathrm{kg/m^3}$ et le nombre d'Avogadro $N = 6.023 \times 10^{23}$.
3. Calculer la valeur de la vitesse de dérive des électrons libres.

Solution Exercice IV.2

1. $j = \frac{I}{S} = 5 \times 10^6\,\mathrm{A.m^{-2}}$.
2. Nombre d'atomes $n_A = \frac{\rho_{Cu}}{M}N = 8.38 \times 10^{+28}\,\mathrm{atom/m^3}$. $n = 8.38 \times 10^{+28}\,\mathrm{e^-/m^3}$.
3. $j = nev$. Donc $v = \frac{j}{ne} = 3.73 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$.

Exercice IV.3

Un cylindre homogène en argent, de diamètre d égal à 1.2 mm et de longueur l égale à 42 cm, est parcouru par un courant $I = 50\,\mathrm{A}$ lorsque la d.d.p appliquée entre ses deux bases vaut $V = 0.3\,\mathrm{V}$.

1. Calculer la conductivité σ de l'argent.
2. Sachant que chaque atome d'argent libère un électron pour la conduction, trouver 1e nombre n d'électrons libres par mètre cube. On rappelle que pour l'argent le nombre de masse est $A = 108$ et la masse volumique $\rho = 10.5\,\mathrm{g/cm^3}$.
3. À partir de deux expressions différentes du vecteur densité de courant, trouver la vitesse de dérive des électrons de conduction.
4. Calculer la mobilité μ des porteurs de charges libres pour l'argent.

Solution Exercice IV.3

1) Pour un conducteur cylindrique homogène : $V = RI$ et $\sigma = l/RS$. Donc $\sigma = 4Il/\left(\pi V d^2\right) = 6.19 \times 10^7\,\Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.
2) $\rho = A\,(n_A/N_A)$ (N_A est le nombre d'Avogadro) et n_A est la densité d'atomes. Comme un atome libère un seul électron $n = n_A$, la densité électronique est $n = \rho N_A/A$.
3) En module, $j = env = I/S$ ce qui donne $v = IS/ne$. De même $j = env = \sigma E = \sigma \frac{V}{L}$, donc $v = \frac{\sigma V}{enL}$
4) $v = \mu E = \mu V/l$ donc $\mu = lv/V$.

Exercice IV.4

Un fil de cuivre, de section $S = 1\,\mathrm{mm}^2$ et de longueur $1 = 58\,\mathrm{cm}$, transporte une charge de 22500 C en 1 h15 mn. Le cuivre contient 8.4×10^{22} électrons par cm^3.

1. Quelle est l'intensité du courant qui parcourt le fil ?
2. Trouver la vitesse de dérive des électrons.
3. Au cours de leur mouvement, les électrons sont soumis, de la part des ions du réseau, à une force de frottement de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$. Sachant que la constante k est égale à 3.7×10^{-17} (MKSA), calculer la résistance du fil de cuivre.

Solution Exercice IV.4

1) Courant : $I = q/t$. 2) Vitesse de dérive : $j = nev_m = I/S$ donc $v_m = I/(neS)$. 3) Résistance : $eE = kv_m$ avec $E = V/l = RI/l$. En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve $RIe/l = kI/(neS)$ et par conséquent $R = kl/\left(ne^2 S\right)$.

Exercice IV.5

Un solénoïde de longueur 10 cm porte 8 couches de spires circulaires de diamètre de 10 cm à raison de 2500 spires par mètre. Le fil est un conducteur dont la conductivité $\sigma = 10^8\,\Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.

1. Calculer la résistance du solénoïde.
2. Quelle est l'intensité du courant dans le solénoïde quand il est soumis à une d.d.p de 100 V ?

Solution Exercice IV.5

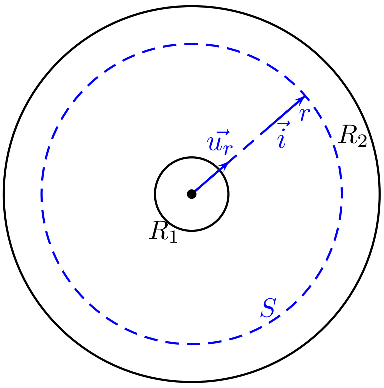
Le diamètre d'une spire, le nombre de couches, le nombre de spires par mètre et la longueur du solénoïde sont respectivement d, n_c, n_s et l.
1) $R = \rho\,(L/S)$ où $\rho = 1/\sigma$ et $L = (\pi d)\, n_c n_s l$.
2) $I = V/R$.

Exercice IV.6

1. On reprend les données de l'exercice III.9 :
   a) En utilisant la loi de joule locale ($\vec{j} = \sigma\vec{E}$), déterminer la résistance de fuite.
   b) Quelle relation lie la capacité à la résistance de ce condensateur ?
2. On reprend ensuite l'exercice III.10 et on demande :
   a) En appliquant l'expression locale de la loi d'Ohm ($\vec{j} = \sigma\vec{E}$) donner l'expression de la résistance de ce câble.
   b) Donner la relation liant la résistance à la capacité.

Solution Exercice IV.6

Loi d'Ohm $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$. Circulation du champ $V(B) - V(A) = -\int_A^B \frac{\vec{j}.\vec{dl}}{\sigma}$. On pose $\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{u}$ et on obtient $V(B) - V(A) = -I\int_A^B \frac{\vec{u}.\vec{dl}}{S\sigma}$. Donc $R = -\int_A^B \frac{\vec{u}.\vec{dl}}{S\sigma}$
1.a) Le courant de fuite et un courant radial qui passe de l'armature positive R_1 à l'armature négative R_2 à travers le diélectrique (de conductivité σ très faible). La densité de courant est radiale ($\vec{u} = \vec{u}_r$) et constante sur chaque surface sphérique $S = 4\pi r^2$ (de rayon r compris entre R_1 et R_2).



Par conséquent,

$$R = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\vec{u}_r.\vec{dl}}{\sigma S} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{\sigma 4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

1.b) Pour le conducteur sphérique $C = \varepsilon \frac{4\pi R_1 R_2}{R_2 - R_1}$. Donc $\frac{C}{R} = (4\pi)^2 \frac{\varepsilon}{\rho}$.
2.a) En utilisant les coordonnées polaires dans la base du cylindre, la figure précédente représente maintenant un plan parallèle à cette base. La densité de courant est radiale dans ce plan ($\vec{u} = \vec{u}_r$) et constante sur chaque surface cylindrique $S = 2\pi r l$. Par conséquent,

$$R = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\vec{u}_r.\vec{dl}}{\sigma S} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{\sigma 2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

2.b) Pour le conducteur cylindrique $C = \varepsilon \frac{2\pi l}{\ln(R_2/R_1)}$. Donc $\frac{C}{R} = (2\pi)^2 \frac{\rho}{\varepsilon}$.

Exercices d'électricité avec solutions
(document en phase de préparation)

Mahmoud Hachemane [1]
Département de Physique Théorique, Faculté de Physique, USTHB.

9 février 2014

1. email : usthbst10@gmail.com

Introduction

Précisions

- Les énoncés des exercices ont été proposés par un ensemble d'enseignants de notre faculté. Je remercie vivement Monsieur A. Chafa pour m'avoir fourni son propre fichier électronique des énoncés. Ils ont été légèrement modifiés dans ce document.
- En premier lieu, les solutions sont destinées à mes propres étudiants (Domaine ST, 1ère année LMD) comme complément aux travaux dirigés (TD), désormais insuffisants. Pour cette raison, ces solutions sont détaillées. Je remercie Messieurs A. Dib, A. Chafa et Mademoiselle R. Yekken pour leurs remarques et corrections.
- Je prie les lecteurs de m'informer des éventuelles erreurs que je ne cesse de découvrir à chaque nouvelle lecture.

Très important :

Méthode de travail pour les bons étudiants

- Assister, bien comprendre et surtout réviser son cours et en faire un résumé (Ne pas croire ceux qui disent le contraire).
- Essayer de faire les exercices avant de voir leurs solutions. Il s'agit d'apprendre à réfléchir.
- Après avoir vu les solutions (en évitant de les apprendre par cœur), refaire les exercices que l'on pas su résoudre soi-même. Savoir résoudre un exercice est totalement différent de comprendre sa solution.
- Passer aux exercices non résolus du TD puis des autres ouvrages.

Méthode de travail pour les étudiants moins bons

- Appliquer la méthode des bons étudiants ☺. Il n'y a pas d'autre solution. Il y a de fortes chances que vous soyez tout aussi bon, sinon meilleur, mais c'est juste la méthode et le travail qui vous manquent.
- Éviter de perdre trop de temps en (football, télévision, réseaux sociaux et divertissements d'internet).
- Si cela ne donne pas de bons résultats, changer de domaine et choisir celui qui nécessite le moins de mathématiques.

Première partie

Interaction Électrique

Exercice I.1

1. Déterminer le nombre d'atomes et d'électrons constituant une pièce de monnaie en cuivre ($^{63}_{29}Cu$), neutre, de 3 g.
2. Cette pièce porte à présent une charge $Q = 5 \times 10^{-9}$ C. Déterminer le nombre d'électrons perdus par la pièce et le comparer au nombre d'atomes.

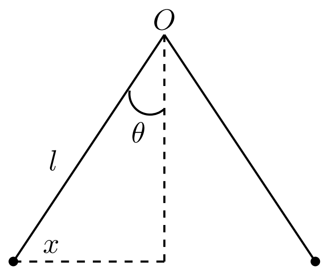
Solution Exercice I.1

Données : $m = 3\,$g, $Z = 29$ et $A = 63.546$. Nombre d'Avogadro $N = 6.023 \times 10^{23}$.
1. Le nombre de moles est $n_{moles} = m/A$ (m en g et non en kg). Le nombre d'atomes est $n_A = n_{moles}N = \frac{mN}{A} = 2.8435 \times 10^{22}$. Le nombre d'électrons est $n_Z = Zn_A = ZmN/A = 8.246 \times 10^{23}$.
2. $Q = +5 \times 10^{-9}C$ et $e = 1.6 \times 10^{-19}C$. Le nombre d'électrons perdus est $n_e = Q/e = 3.12 \times 10^{+10}$. Donc $n_e/n_A \sim 10^{-13}$.

Exercice I.2

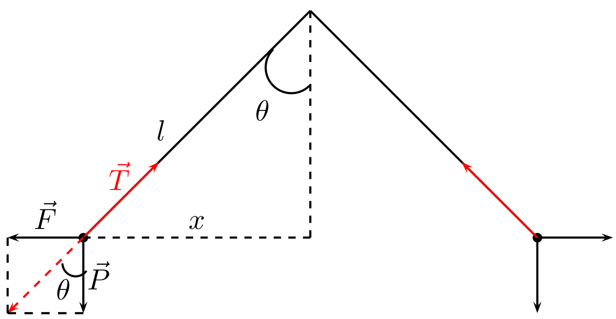
Deux sphères conductrices identiques de masse $m = 10\,$g portent des charges q_1 et q_2. On les met en contact, puis on les sépare.

1. Calculer les charges q'_1 et q'_2 qu'elles prennent dans les cas suivants :
   a) $q_1 = +4 \times 10^{-8}$ C et $q_2 = 0$ C.
   b) $q_1 = +3 \times 10^{-8}$ C et $q_2 = + 8 \times 10^{-8}$ C.
   c) $q_1 = +3 \times 10^{-8}$ C et $q_2 = -8 \times 10^{-8}$ C.
   Préciser chaque fois le sens du transfert d'électrons.
2. Les deux masses sont suspendues au même point O par deux fils identiques de Nylon de longueur $l = 80\,$cm (figure ci-dessous). En négligeant la masse des fils, calculer la distance $2x$ séparant les deux sphères pour les 3 cas précédents (on supposera que l'angle θ est suffisamment petit et $g = 10\,$m/s^2).



Solution Exercice I.2

Données : $l = 0.8m$, $K = 9 \times 10^9 C^{-2}m^3kg.s^{-2}$, $m = 10^{-2}kg$, $g = 10m/s^2$



1. Comme les sphères sont identiques, elles porteront la même charge après le contact $q'_1 = q'_2 = (q'_1 + q'_2)/2$. Système électriquement isolé⇒conservation de la charge : $q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$,
Donc $q'_1 = q'_2 = (q_1 + q_2)/2$. Le tableau suivant résume les résultats (en C) :

Cas	q_1	q_2	$q_1 + q_2$	$q'_1 = q'_2$
a	4×10^{-8}	0	4×10^{-8}	2×10^{-8}
b	3×10^{-8}	8×10^{-8}	11×10^{-8}	5.5×10^{-8}
c	3×10^{-8}	-8×10^{-8}	-5×10^{-8}	-2.5×10^{-8}

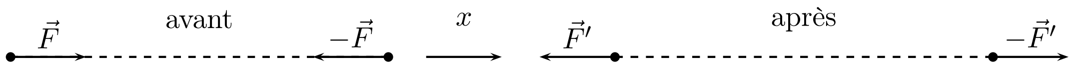
2. Les deux sphères portent la même charge et se repoussent donc par une force $F = K\frac{q'_1 q'_2}{(2x)^2} = K\frac{q'^2_1}{(2x)^2}$.
Géométrie : $\frac{x}{l} = \sin\theta$. La RFD $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$ donne $\frac{F}{P} = \tan\theta$. L'angle étant petit, alors $\sin\theta = \tan\theta$ d'où $\frac{x}{l} = K\frac{q'^2_1}{mg(2x)^2} \Rightarrow x = \left(K\frac{lq'^2_1}{4mg}\right)^{1/3}$
AN. Cas a : $x = 1.93cm$. Cas b : $x = 3.79cm$. Cas c : $x = 2.24cm$.

Exercice I.3

Deux sphères conductrices identiques portant des charges de signes opposés s'attirent avec une force de 0.108 N, quand la distance qui les sépare est $d = 0.5$ m. On les relie à l'aide d'un fil conducteur. Après avoir enlevé le fil, elles se repoussent avec une force de 0.036 N, pour la même distance. Quelle était la charge initiale de chaque sphère ? (Les rayons des sphères sont très négligeables devant la distance d)

Solution Exercice I.3

Données : $F = 0.108N$, $d = 0.5m$, $F' = 0.036N$.
Soient q_1 et q_2 les charges initiales des deux sphères. La force est $F = -K\frac{q_1 q_2}{d^2}$ (car $q_1 q_2 < 0$). Le fil conducteur permet le déplacement des charges d'une sphère à l'autre pour avoir la même charge $q' = \frac{q_1+q_2}{2}$ (Conservation de la charge et sphères identiques).



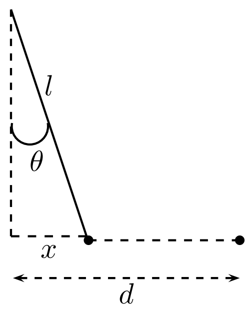
La force après avoir enlevé le fil est $F' = K\frac{q'^2}{d^2} = K\frac{(q_1+q_2)^2}{4d^2}$. On a donc un système de deux équations du second degré :

$$\begin{cases} q_1 q_2 = -\frac{Fd^2}{K} \\ (q_1+q_2)^2 = \frac{4F'd^2}{K} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 q_2 = -3.0\times 10^{-12} \\ q_1+q_2 = \pm 2.0\times 10^{-6} \end{cases}$$

La solution dépend du signe ($\pm$) de q_1+q_2. Pour le signe ($-$), on aura ($q_1 = -3.0\times 10^{-6}C$, $q_2 = 1.0\times 10^{-6}C$), ou l'inverse ($q_1 = 1.0\times 10^{-6}C$, $q_2 = -3.0\times 10^{-6}C$).
Pour le signe ($+$), on aura ($q_1 = -1.0\times 10^{-6}C$, $q_2 = 3.0\times 10^{-6}C$), ou l'inverse ($q_1 = 3.0\times 10^{-6}C, q_2 = -1.0\times 10^{-6}C$).
On a quatre solutions parce qu'on peut permuter les charges q_1 et q_2, ainsi que leurs signes, sans changer ni F ni F'.

Exercice I.4

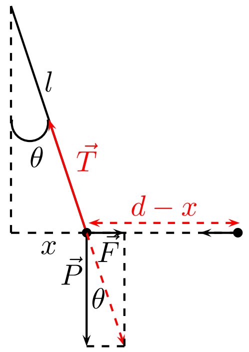
La figure ci-dessous représente un pendule constitué d'un fil de longueur $l = 10\,\text{cm}$ et d'une boule de masse $m = 9\,\text{g}$ portant une charge électrique $Q_1 = +2\times 10^{-8}\,\text{C}$. On place à une distance $d = 4\,\text{cm}$ de cette boule une charge ponctuelle $Q_2 = -5\times 10^{-8}\,\text{C}$. On prendra $g = 10\,\text{m/s}^2$.



1. Calculer l'angle θ d'inclinaison du pendule (on le supposera suffisamment petit).
2. Calculer la force électrostatique qui s'exerce sur la boule.

Solution Exercice I.4

Données : $l = 10^{-1}$m, $m = 10^{-2}kg$, $Q_1 = 2\times 10^{-8}C$, $d = 4\times 10^{-2}m$, $Q_2 = -5\times 10^{-8}C$.

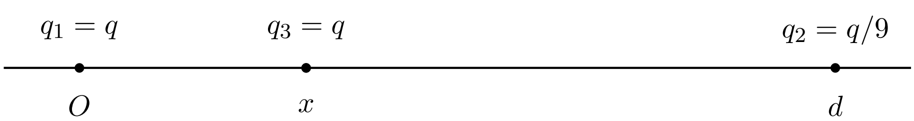


1. Les forces électriques sont attractives. L'approximation du petit angle, permet d'écrire (voir exercice précédent) : $\frac{x}{l} = \sin\theta = \tan\theta = \frac{F}{mg}$ où $F = -K\frac{Q_1Q_2}{(d-x)^2}$ (en module). Donc $\frac{x}{l} = -K\frac{Q_1Q_2}{mg(d-x)^2} \Rightarrow (d-x)^2 = -Kl\frac{Q_1Q_2}{mg}\frac{1}{x} \Longrightarrow x^3 - 2dx^2 + d^2x + K\frac{lQ_1Q_2}{mg} = 0$. D'où $x^3 - 8\,10^{-2}x^2 + 16\,10^{-4}x - 9\,10^{-6} = 0$
L'équation se simplifie en posant $x = y \times 10^{-2}$ (on travaille en cm). On obtient : $y^3 - 8y^2 + 16y - 9 = 0$. On remarque que $y = 1$ est une solution [1]. L'équation devient alors : $(y-1)(y^2 - 7y + 9) = 0$. Les deux solutions, qui restent, sont celles de $(y^2 - 7y + 9) = 0$. On trouve $y = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$.
A ces trois solutions correspondent $x = 1\,\text{cm}$, $x = 1.7\,\text{cm}$ ou $x = 5.30\,\text{cm}$. On constate que la dernière solution correspond à $x > d$ ce qui contredit l'hypothèse de l'exercice [2]. De plus, $\theta = \arcsin\frac{x}{l} = \arcsin(0.53) \simeq 32°$ ce qui ne vérifie pas à l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$. Les deux premières solutions sont acceptables et correspondent à des θ différents tout en vérifiant l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$. On choisit $x = 1cm$ car elle correspond à la meilleure approximation ($\theta = \arcsin(0.1) = 5.7°$ est le plus petit).
2. $F = -K\frac{Q_1Q_2}{(d-x)^2} = \frac{x}{l}mg = 10^{-2}N$.

Exercice I.5

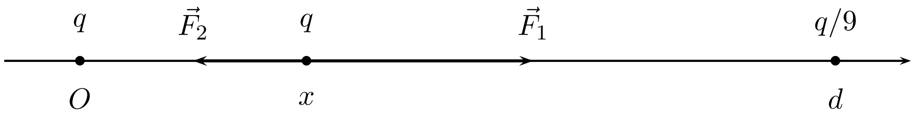
On considère le système de charges ponctuelles, représenté sur la figure ci-dessous. Les charges positives q_1 et q_2 sont fixées respectivement aux points O et A distants de d. Soit une charge q_3, assujettie à se déplacer le long du segment OA :

1. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur q_3 au point M.
2. A quelle abscisse x_0, la charge q_3 est dans une position d'équilibre ?
   A.N : $d = 4\,\text{cm}$.



1. Sinon, on peut résoudre graphiquement en représentant la fonction $y^3 - 8y^2 + 16y - 9$
2. Une ancienne version de cet exercice possède une seule solution (réelle) correspondant à $x > d$. Dans la présente version, Q_1, Q_2 et d ont été choisies de façon à avoir trois solutions.

Solution Exercice I.5



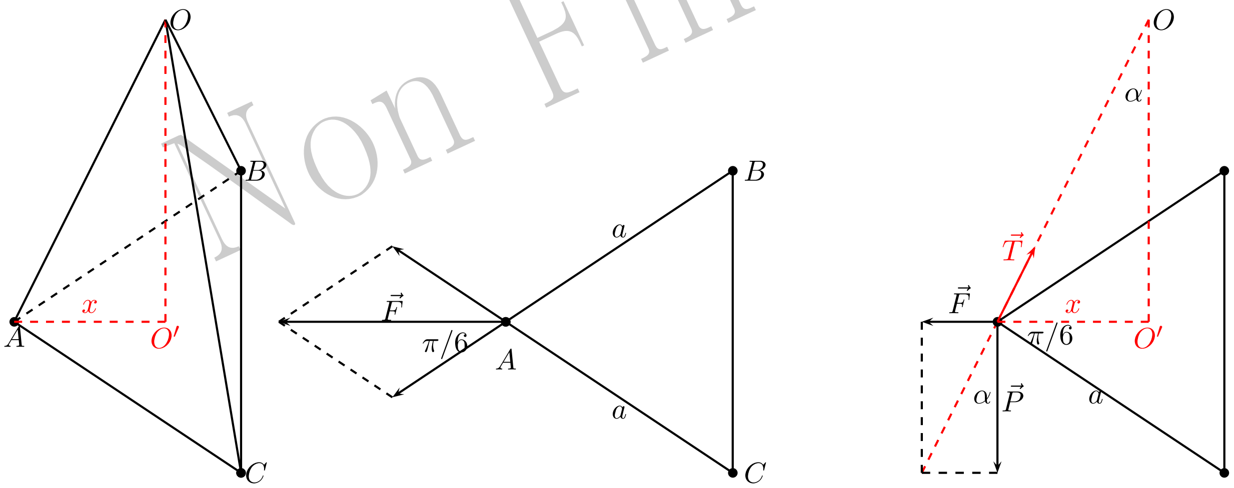
1. En valeurs algébriques : $F_1 = K\frac{q^2}{x^2}$ et $F_2 = -K\frac{q^2}{9(d-x)^2}$
$F = K\frac{q^2}{x^2} - K\frac{q^2}{9(d-x)^2} = Kq^2\frac{9(d-x)^2-x^2}{9x^2(d-x)^2} = Kq^2\frac{(3d-2x)(3d-4x)}{9(d-x)^2x^2}$
2. Équilibre : $F = 0 \Rightarrow (3d-2x)(3d-4x) = 0$. Alors $x = \frac{3d}{4} = 3cm$ (l'autre solution $x = \frac{3d}{2}$ est inacceptable car elle correspond à $x > d$).

Exercice I.6

Trois petites boules identiques de masse $m = 10\,\text{g}$, sont suspendues à un même point au moyen de trois fils de soie distincts de longueur $l = 1\,\text{m}$. Ces trois boules de même charge q se positionnent alors au sommet d'un triangle équilatéral de côté $a = 0.1\,\text{m}$. Calculer la charge q.

Solution Exercice I.6

Données : $m = 10^{-2}kg$, $l = 1m$, $a = 0.1m$



Résultante des forces électriques sur l'une des charges $F = 2K\frac{q^2}{a^2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Le point O est au dessus du centre O' du triangle situé à $x = \frac{2}{3}a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. L'angle α étant petit, on a $\sin\alpha = \tan\alpha \Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{F}{mg} \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{a}{l}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2K}{mg}\frac{q^2}{a^2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Donc $q = \sqrt{\frac{a^3mg}{3Kl}} = 6\times10^{-8}C$.

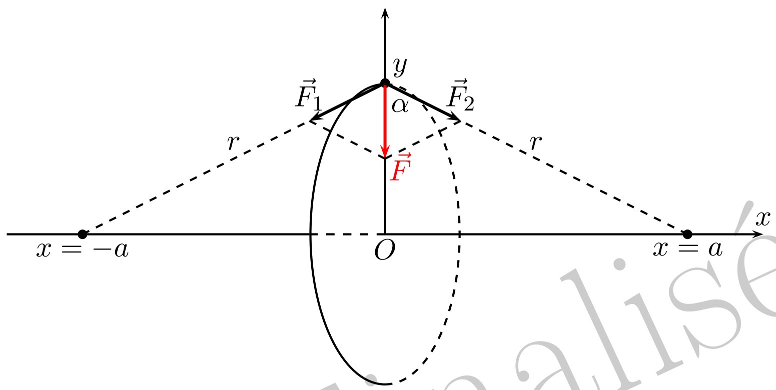
Exercice I.7

Deux charges électriques ponctuelles $(+q)$ sont séparées par une distance $2a$. On place une autre charge ponctuelle mobile dans le plan médiateur du segment $2a$.

Montrer qu'il existe, dans ce plan, un cercle pour lequel la charge mobile est soumise à une force maximale. Déterminer son rayon.

Solution Exercice I.7

Soient O le milieu de $[x=-a, x=+a]$ et y la position de la troisième charge Q (par exemple, de signe opposé à q).



A cause de la symétrie, on a $F_1 = F_2 = K\frac{qQ}{r^2}$. La force résultante exercée sur Q est parallèle à $y'Oy$. Par conséquent, $F = 2K\frac{qQ}{r^2}\cos\alpha$ où $r^2 = y^2 + a^2$ et $\cos\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{(y^2+a^2)^{1/2}}$. Donc, $F = 2K\frac{qQy}{(y^2+a^2)^{3/2}}$. Si l'on place Q sur n'importe quel autre point du cercle perpendiculaire à $x'Ox$, de centre O et de rayon $R = y$, on aura une force de même module est dirigée vers O.

Le maximum de F se détermine par $\frac{dF}{dy} = 0$. Ce qui donne

$-2KQq\,\frac{\left(2\,y^2-a^2\right)}{(y^2+a^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \Rightarrow y = -a/\sqrt{2}$ et $y = a/\sqrt{2}$

On obtient un cercle de rayon $R = a/\sqrt{2}$ et un maximum $F = 2K\frac{qQa}{\sqrt{2}\left(\frac{a^2}{2}+a^2\right)^{3/2}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}K\frac{Qq}{a^2}$