Equations aux dérivées partielles (EDP), Méthode de résolution des EDP par séparation de variables ; Applications

Thierry Lubin

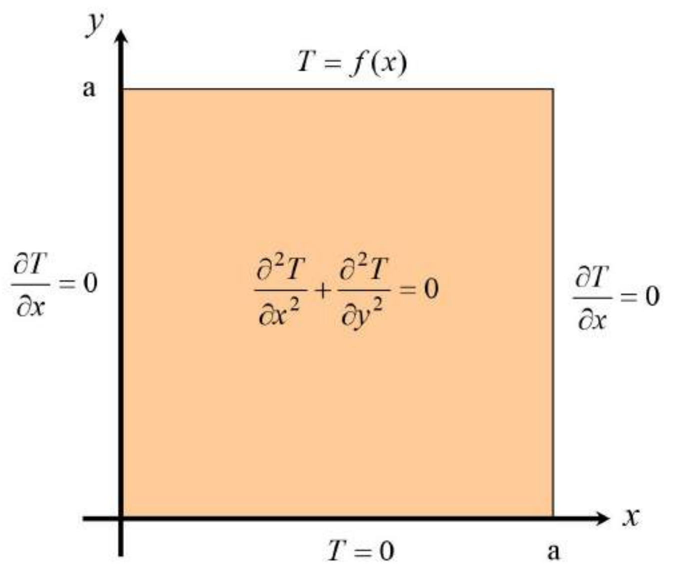
E. D. P.

II. Application de la méthode de séparation des variables

1. Equation de Laplace dans un carré

On se propose d'étudier la distribution de température à l'équilibre dans une barre de section carré (on considère un problème en 2 dimensions). La température à l'équilibre thermique dans un solide vérifie, en l'absence de sources volumiques de chaleur, l'équation de Laplace (voir cours de thermique).
On considère qu'un dispositif quelconque impose une température nulle en $y = 0$ et une température dépendant de la variable x en $y = a$. Les conditions aux frontières où la valeur de la fonction est fixée s'appellent des **conditions de Dirichlet.**

On considère que le système est isolé thermiquement (cloison calorifuge) en $x= 0$ et en $x= a$, ce qui correspond à fixer une valeur nulle pour la dérivée de la température par rapport à la normal (**conditions de Neumann**).
Le problème à résoudre est donc le suivant :



(E) : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

(Ω) : $\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \end{cases}$

(F) : $\begin{cases} x = 0 \rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ x = a \rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ y = 0 \rightarrow T = 0 \\ y = a \rightarrow T = f(x) \end{cases}$

Figure 11 : Résolution de l'équation de Laplace dans un carré de coté *a*.

La méthode de résolution par séparation des variables consiste à rechercher une solution de la forme (on sépare les variables *x* et *y*) :

$$T(x, y) = X(x)Y(y)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation de Laplace (E), nous avons :

$$X^{"}Y + Y^{"}X = 0$$

Si maintenant nous divisons cette expression par le produit XY, nous obtenons :

$$\frac{Y^{"}}{Y} = -\frac{X^{"}}{X} = \lambda$$ (λ est une constante quelconque)

Les variables sont bien séparables car elles se trouvent de chaque coté de l'égalité. L'égalité impose que les rapports soient constants, c'est la seule possibilité pour des fonctions de variables différentes. On introduit alors la constante de séparation λ qu'il faut définir.

On est alors amené à résoudre les 2 problèmes suivant :

♦ 1 problème aux valeurs propres (problème de Sturm-Liouville, voir en annexe) sur la variable *x* car les conditions aux frontières homogènes se trouvent sur cette variable :

$$\begin{cases} X^{"} + \lambda X = 0 \\ X^{'}(0) = X^{'}(a) = 0 \end{cases}$$

où il faut définir toutes valeurs propres λ_n vérifiant les conditions aux frontières et les fonctions propres associées $X_n(x)$.

♦ 1 équation différentielle sur la variable *y* :

$$Y'' - \lambda_n Y = 0$$

Remarque : Les conditions aux frontières en *y = 0* et en *y = a* permettront de calculer les constantes d'intégration de la solution générale.

On commence par résoudre le problème aux valeurs propres. On étudie toutes les possibilités pour la constante de séparation *λ* :

a) Résolution du problème aux valeurs propres

$X'' + \lambda X = 0$ Équation caractéristique : $r^2 + \lambda = 0 \rightarrow \quad \Delta = -4\lambda$

♦ 1[er] cas : *Δ* = 0 soit *λ* = 0

La solution s'écrit : $X(x) = Ax + B$

$X'(0) = 0 \rightarrow A = 0$; L'autre condition ($X'(a) = 0$ ne nous apprend rien sur B).

Par conséquent, $\lambda = \lambda_0 = 0$ est une valeur propre simple et $X_0(x) = B_0$ (où B_0 est une constante arbitraire) est une fonction propre simple.

♦ 2[ème] cas : *Δ* > 0 soit *λ* < 0. On pose $\lambda = -\alpha^2$ soit $\Delta = 4\alpha^2 \rightarrow r_1 = \alpha$ et $r_2 = -\alpha$

La solution s'écrit : $X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$

$X'(0) = 0 \rightarrow A\alpha - B\alpha = 0$ soit $A = B$

$X'(a) = 0 \rightarrow A\alpha\left(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}\right) = 2A\alpha . sh(\alpha a) = 0$

Comme $\alpha \neq 0$, $sh(\alpha a) \neq 0$ et par conséquent *A* = *B* = 0

$\lambda < 0$ ne sont pas des valeurs propres du problème.

♦ 3[ème] cas : *Δ* < 0 soit *λ* > 0. On pose $\lambda = \beta^2$ soit $\Delta = -4\beta^2 \rightarrow r_1 = j\beta$ et $r_2 = -j\beta$

La solution s'écrit : $X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$

$X'(0) = 0 \rightarrow B = 0$

$X'(a) = 0 \rightarrow -A\beta\sin(\beta a) = 0$; comme $\beta \neq 0$, $-A\beta\sin(\beta a) = 0$ impose (en dehors de *A=0* qui est une solution triviale) :

$$\beta = \frac{n\pi}{a} \quad \text{avec} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Par conséquent, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ sont les valeurs propres du problème aux limites.

Les fonctions propres associées aux valeurs propres λ_n s'écrivent :

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

b) <u>Résolution de l'équation différentielle sur la variable *y*</u>

Les valeurs de λ (valeurs propres) étant maintenant connues, on peut résoudre l'équation différentielle en y :

$$Y'' - \lambda_n Y = 0$$

♦ pour $\lambda_0 = 0$, l'équation précédente se simplifie et la solution est évidente :

$$Y_0'' = 0 \quad \rightarrow \quad Y_0(y) = A_0 y + B_0$$

où A_0 et B_0 sont des constantes arbitraires.

♦ pour $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, nous obtenons :

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n = 0 \quad \rightarrow \quad Y_n(y) = A_n e^{\left(\frac{n\pi}{a}\right)y} + B_0 e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)y}$$

où A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

c) <u>Solution générale de l'EDP:</u>

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles est la superposition de l'ensemble des solutions (on doit considérer toutes les fonctions propres) :

$$T(x,y) = X_0(x)Y_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$$

soit :

$$T(x,y) = A_0 + B_0 y + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\left(\frac{n\pi}{a}\right)y} + B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)y}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

d) <u>Solution particulière</u> :

La solution générale doit vérifier les conditions aux frontières en $y = 0$ et en $y = a$:

$$T(x; y=0) = 0 \qquad T(x; y=a) = f(x)$$

→ La première condition nous amène à la relation suivante :

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = 0 \quad \rightarrow \quad A_0 = 0 \ \ et \quad A_n = -B_n$$

A partir de ces résultats, nous pouvons réécrire l'équation de la température de la façon suivante :

$$T(x,y) = B_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

sachant que $sh(ay) = \dfrac{e^{ay} - e^{-ay}}{2}$ (sinus hyperbolique).

→ La deuxième condition nous amène à la relation suivante :

$$f(x) = B_0 a + \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n sh(n\pi)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Pour simplifier l'expression, on pose $B_0' = B_0 a$ et $A_n' = 2A_n sh(n\pi)$. On obtient alors :

$$f(x) = B_0' + \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Il reste à déterminer les expressions des coefficients B_0' et A_n'. L'expression de B_0' s'obtient en intégrant l'équation précédente entre 0 et a :

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a B_0' dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a A_n' \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx \qquad \text{or} \qquad \int_0^a A_n' \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = 0$$

Par conséquent, l'expression du coefficient B_0' est la suivante :

$$B_0' = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx$$

L'expression du coefficient d'indice m noté A_m' s'obtient en multipliant l'équation par $\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ et en intégrant entre 0 et a :

$$\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \int_0^a B_0^{'}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a A_m^{'}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

Cette équation se simplifie (propriétés d'orthogonalité):

$$\int_0^a B_0^{'}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathrm{n} \neq \mathrm{m} \\ \dfrac{\mathrm{a}}{2} & \text{si} \quad \mathrm{n} = \mathrm{m} \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient pour le coefficient $A_n^{'}$:

$$A_n^{'} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

On retrouve les expressions des coefficients du développement en série de Fourier de la fonction *f(x)* sur l'intervalle [0, *a*] :

Application : $f(x) = kx + q$ et $a = \pi$

Après quelques calculs, nous obtenons:

$$B_0^{'} = \frac{1}{2}k\pi + q \qquad \text{et} \qquad B_n^{'} = \frac{2k}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

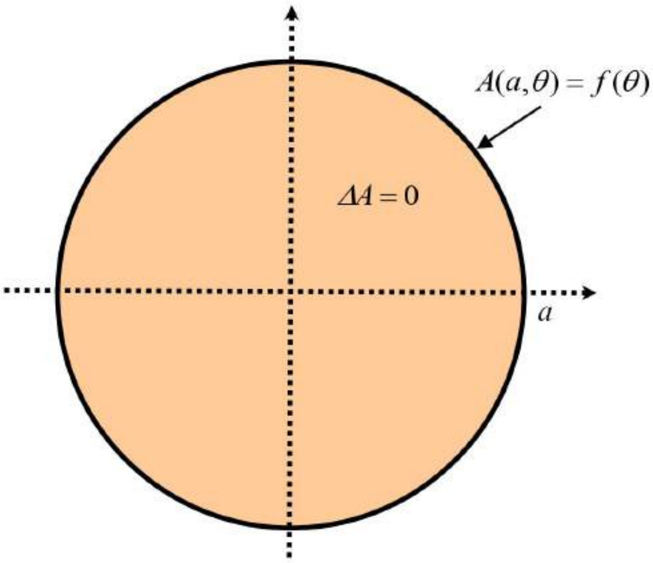
La répartition de température dans le carré de longueur $a = \pi$ s'écrit alors :

$$T(x, y) = \left(\frac{k}{2} + \frac{q}{\pi}\right)y + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\frac{sh(ny)}{sh(n\pi)}\cos(nx)$$

Les figures suivantes représentent les courbes d'iso-température en prenant *k = 50/π* et *q=50* et la distribution de température en *x=pi/2*.

2. Equation de Laplace dans un disque

Il s'agit de calculer le potentiel vecteur magnétique *A(r,θ)* vérifiant l'équation de Laplace à l'intérieur d'un disque de rayon *r = a*. Le problème à résoudre est le suivant :



(E) : $\dfrac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}=0$

(Ω): $\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

(F) : $A(r=a;\theta)=f(\theta)$

Problème périodique :

$$A(r,0)=A(r,2\pi)$$
$$\frac{\partial A}{\partial \theta}(r,0)=\frac{\partial A}{\partial \theta}(r,2\pi)$$

Figure 14 : Résolution de l'équation de Laplace dans un disque de rayon *a*

La méthode de résolution par séparation des variables consiste à rechercher une solution de la forme (on sépare les variables *r* et *θ*) :

$$A(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$

Si on remplace cette expression dans l'équation de Laplace, nous obtenons :

$$R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0$$

Si nous divisons cette expression par le produit $R\Theta$, nous pouvons écrire :

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda \qquad (\lambda \text{ est une constante quelconque})$$

Les variables sont bien séparables car elles se trouvent de chaque coté de l'égalité. L'égalité impose que les rapports soient constants. On introduit alors la constante de séparation λ qu'il faut définir.

On est alors amené à résoudre les problèmes suivants :

♦ 1 problème aux valeurs propres (Sturm-Liouville) sur la variable θ (problème périodique voir annexe) :

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

où il faut rechercher toutes les valeurs propres λ_n et les fonctions propres associées $\Theta_n(\theta)$.

♦ 1 équation différentielle (équation d'Euler voir annexe) sur la variable r :

$$r^2R'' + rR' - \lambda_n R = 0$$

Remarque : La condition sur la frontière du disque en $r = a$ permettra de déterminer les constantes d'intégration apparaissant dans la solution générale.

On commence par résoudre le problème aux valeurs propres. On étudie toutes les possibilités pour la constante de séparation λ :

a) Résolution du problème aux valeurs propres :

$\Theta'' + \lambda\Theta = 0$ équation caractéristique : $r^2 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta = -4\lambda$

♦ 1er cas : $\Delta = 0$ soit $\lambda = 0$

La solution s'écrit : $\Theta(\theta) = A\theta + B$

$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \rightarrow A = 0$; l'autre condition de périodicité sur la dérivée n'apporte rien. $\Theta(\theta) = B$ vérifie la condition de périodicité.
Par conséquent, $\lambda = \lambda_0 = 0$ est une valeur propre simple et $\Theta_0(\theta) = B_0$ (B_0 est une constante arbitraire) est une fonction propre simple.

♦ 2ème cas : $\Delta > 0$ soit $\lambda < 0$. On pose $\lambda = -\alpha^2$ soit $\Delta = 4\alpha^2 \rightarrow r_1 = \alpha$ et $r_2 = -\alpha$

La solution s'écrit : $\Theta(\theta) = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta}$

$$\left.\begin{matrix} \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} 2A\left(1 - e^{\alpha 2\pi}\right) = 0 \\ B\left(1 - e^{-\alpha 2\pi}\right) = 0 \end{cases} \quad avec \quad \alpha \neq 0 \quad soit \quad A = B = 0$$

Par conséquent, $\lambda < 0$ ne sont pas des valeurs propres du problème.

♦ <u>$3^{ème}$ cas</u> : $\Delta < 0$ soit $\lambda > 0$. On pose $\lambda = \beta^2$ soit $\Delta = -4\beta^2 \rightarrow r_1 = j\beta$ et $r_2 = -j\beta$

La solution s'écrit : $\Theta(\theta) = A\cos(\beta\theta) + B\sin(\beta\theta)$

Les conditions de périodicité permettent d'écrire :

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \rightarrow A = A\cos(\beta 2\pi) + B\sin(\beta 2\pi)$$
$$\Theta^{'}(0) = \Theta^{'}(2\pi) \rightarrow B = -A\sin(\beta 2\pi) + B\cos(\beta 2\pi)$$

Les 2 équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle (système d'équations linéaires homogènes) :

$$\begin{bmatrix} -1+\cos(\beta 2\pi) & \sin(\beta 2\pi) \\ -\sin(\beta 2\pi) & -1+\cos(\beta 2\pi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il existe une solution non triviale ($A \neq 0$ *et* $B \neq 0$) si et seulement si le déterminant de la matrice est nul (voir cours d'algèbre linéaire) :

$$(-1+\cos(\beta 2\pi))^2 + \sin^2(\beta 2\pi) = 0 \quad \text{soit} \quad \cos(\beta 2\pi) = 1$$

Cette égalité est vérifiée pour $\beta = n$ avec n = 1, 2, 3 ……

Par conséquent, $\lambda_n = n^2$ sont les valeurs propres du problème périodique. Les fonctions propres associées aux valeurs propres s'écrivent :

$$\Theta_n(x) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)$$

b) <u>Résolution de l'équation différentielle sur la variable *r*</u>

Les valeurs de λ (valeurs propres) étant maintenant connues, on peut résoudre l'équation différentielle suivant la variable *r* (équation d'Euler):

$$r^2R^{"} + rR^{'} - \lambda_n R = 0$$

♦ pour $\lambda_0 = 0$, l'équation précédente se simplifie et la solution est:

$$r^2R^{"} + rR^{'} = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_0(r) = A_0 + B_0\ln r$$

où A_0 et B_0 sont des constantes arbitraires.

♦ pour $\lambda_n = n^2$, nous obtenons (voir en annexe pour l'équation d'Euler):

$$r^2R^{"} + rR^{'} - n^2R = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$$

où A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

c) Solution générale de l'EDP:

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles est la superposition de l'ensemble des solutions (on doit considérer toutes les valeurs propres) :

$$A(r,\theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\Theta_n(\theta)$$

soit :

$$A(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)\left(C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)\right)$$

Cette relation peut écrire de la façon suivante où A_n, B_n, C_n et D_n sont de nouvelles constantes d'intégration :

$$\boxed{A(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)\cos(n\theta) + \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right)\sin(n\theta)\right\}}$$

Dans le cas d'un disque, la solution devant être finie en $r = 0$ (problème physique), les coefficients B_0, B_n et D_n doivent être nuls. La solution générale se réduit donc à :

$$A(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos(n\theta) + C_n r^n \sin(n\theta) \quad \text{avec } n = 1, 2, 3, \ldots..$$

d) Solution particulière :

La solution générale doit vérifier la condition sur la frontière du disque en $r = a$:

$$A(r = a; \theta) = f(\theta)$$

On obtient alors la relation suivante :

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \cos(n\theta) + C_n a^n \sin(n\theta)$$

Pour simplifier l'expression, on pose $A_n^{'} = a^n A_n$ et $C_n^{'} = a^n C_n$. :

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{'} \cos(n\theta) + C_n^{'} \sin(n\theta)\right)$$

La décomposition de $f(\theta)$ sur la base des fonctions propres nous donne pour les coefficients (série de Fourier) :

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \qquad A_n^{'} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \qquad C_n^{'} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta$$

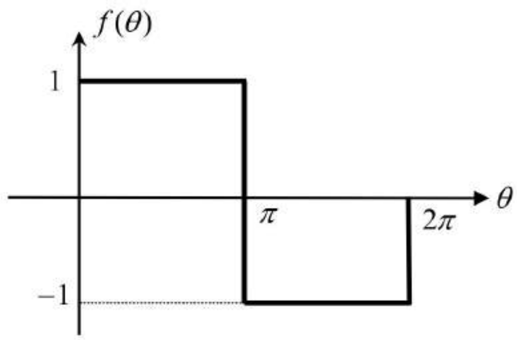
Applications :

♦ si $f(\theta) = \cos(p\theta)$, la solution est la suivante (figure 15.a pour p =1 et figure 15.b pour p = 2)

$$n = p \;;\; A_0 = 0 \;;\; A_p^{'} = 1 \text{ et } C_p^{'} = 0$$

$$A(r,\theta) = \left(\frac{r}{a}\right)^p \cos(p\theta)$$

♦ si $f(\theta)$ à l'allure suivante :

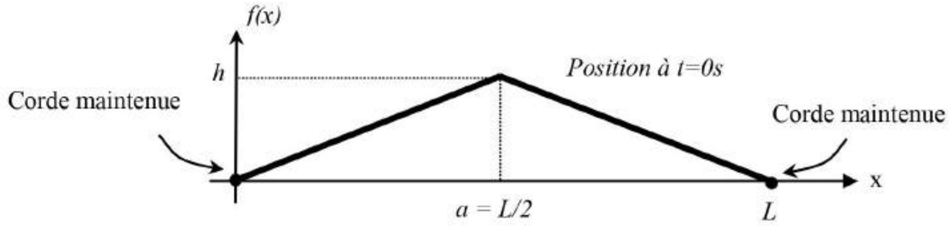


La solution est la suivante (figure 16):

$$A(r,\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}\frac{\sin((2k+1)\theta)}{2k+1}$$

5. Equation des ondes en 1D

Les vibrations d'une corde de piano ou de clavecin (corde frappée ou corde pincée) répondent à l'équation de d'Alembert ou équation des ondes en 1D. Nous allons résoudre l'équation des ondes en utilisant la méthode de séparation des variables.
Le problème est le suivant. On considère une corde de longueur *L* maintenue à chaque extrémité. La corde est pincée et lâchée à $t = 0$ de telle manière que sa vitesse initiale soit nulle. L'endroit $x = a$ où l'on pince la corde à une grande influence vis-à-vis des harmoniques présents (et par conséquent sur le son). On considère qu'à l'instant initiale, la position de la corde est la suivante (la corde est pincée au milieu sur une hauteur *h* et présente une forme triangulaire représentée par la fonction f(x)) :



Les lois de la physique nous amène à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante où *y(x,t)* est la fonction inconnue (position de la corde en chaque point et à chaque instant) et *v* est la vitesse de propagation en m/s qui dépend des caractéristiques physiques de la corde.

Equation à résoudre (E) : $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Domaine d'étude (Ω) : $0 \le x \le L$

Conditions aux frontières(F) : $\begin{cases} y(0;t) = 0 \\ y(L;t) = 0 \end{cases}$ (corde fixée aux extrémités)

Conditions initiales (I) : $y(x;t=0) = f(x)$ (position initiale de la corde)

$\frac{\partial y}{\partial t}(x;t=0) = 0$ (vitesse initiale nulle)

La fonction *f(x)* s'écrit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x & pour \quad 0 \le x \le L/2 \\ \frac{2h}{L}(L-x) & pour \quad L/2 \le x \le L \end{cases}$$

Comme pour les exemples précédents, on recherche une solution de la forme (on sépare les variables *x* et *t*) :

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

Si nous remplaçons cette expression dans l'équation (E), nous obtenons :

$$\frac{1}{v^2} XT'' = X''T$$

On divise par le produit *XT*

$$\frac{1}{v^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \qquad (\lambda \text{ est une constante quelconque})$$

Encore une fois, les variables sont bien séparables car elles se trouvent de chaque coté de l'égalité.

On est alors amené à résoudre les problèmes suivant :

♦ 1 problème aux valeurs propres (Sturm-Liouville) sur la variable *x* (car les conditions aux frontières homogènes se trouvent sur cette variable) :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

où il faut rechercher toutes valeurs propres λ_n et les fonctions propres $X_n(x)$.

♦ 1 équation différentielle du 1er ordre sur la variable *t* :

$$T''(t) + \lambda_n v^2 T(t) = 0$$

a) Résolution du problème aux valeurs propres

Le problème aux valeurs propres est identique à celui que l'on a résolu pour l'équation de la chaleur. Les valeurs propres et les fonctions propres sont les suivantes :

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad avec \quad n = 1, 2, 3, ...\infty$$

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

b) Résolution de l'équation différentielle sur la variable *t*

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 T(t) = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$T(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)$$

où C_n et D_n sont deux constantes arbitraires.

b) Solution générale de l'EDP:

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles est la superposition de l'ensemble des solutions (on doit considérer toutes les valeurs propres) :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

En associant les coefficients A_nC_n et A_nD_n entre eux, nous obtenons la solution générale de l'EDP :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

d) Solution particulière :

La solution générale doit vérifier les conditions initiales :

$$y(x;t=0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x;t=0) = 0$$

avec

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2h}{L}x & pour \quad 0 \le x \le L/2 \\ \dfrac{2h}{L}(L-x) & pour \quad L/2 \le x \le L \end{cases}$$

En remplaçant les deux conditions initiales dans la solution générale, nous obtenons :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n L}{n\pi v} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{qui impose } B_n = 0$$

Il reste donc à calculer les coefficients A_n en décomposant *f(x)* sur la base des fonctions propres :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

En remplaçant *f(x)* par son expression, nous obtenons :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} \frac{2h}{L}(L-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Le développement des calculs nous donne :

$$A_n = \frac{8h}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

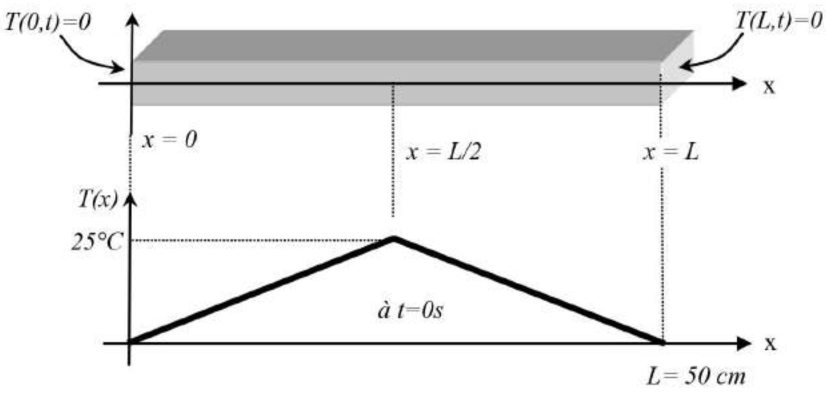
La position de la corde en fonction de *x* et du temps est alors donnée par la fonction suivante :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8h}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

4. Equation de la chaleur en 1D

On va maintenant résoudre le problème de diffusion de la température présenté dans l'introduction. On considère une barre en cuivre peu épaisse de diffusivité thermique *k* (*k = 1 cm²/s*) qui est totalement isolée de l'extérieur et pour laquelle on a fixé les températures aux deux extrémités à *0°C*. La répartition initiale de la température (à *t = 0 s*) dans la barre est donnée par la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x & pour \quad 0 < x < L/2 \\ L - x & pour \quad L/2 < x < L \end{cases}$$



(E) : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

(Ω) : $0 \le x \le L$

(F) : $\begin{cases} T(0;t) = 0°C \\ T(L;t) = 0°C \end{cases}$

(I) : $T(x; t = 0) = f(x)$

Figure 17 : Résolution de l'équation de la chaleur en 1D

Comme dans les exemples précédents, on recherche une solution de la forme (on sépare les variables *x* et *t*) :

$$T(x,t) = X(x)\Psi(t)$$

Si nous remplaçons cette expression dans l'équation (E), nous obtenons :

$$X\Psi' = kX''\Psi$$

On divise par le produit $X\Psi$

$$\frac{1}{k}\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$ (λ est une constante quelconque)

Encore une fois, les variables sont bien séparables car elles se trouvent de chaque coté de l'égalité. On introduit à nouveau la constante de séparation λ qu'il faut définir.

On est alors amené à résoudre les problèmes suivant :

♦ 1 problème aux valeurs propres (Sturm-Liouville) sur la variable *x* (car les conditions aux frontières homogènes se trouvent sur cette variable) :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

où il faut rechercher toutes valeurs propres λ_n et les fonctions propres $X_n(x)$.

♦ 1 équation différentielle du 1er ordre sur la variable *t* :

$$\Psi'(t) + \lambda_n k\Psi(t) = 0$$

On commence par résoudre le problème aux valeurs propres. On étudie toutes les possibilités pour la constante de séparation λ :

a) Résolution du problème aux valeurs propres

$$X'' + \lambda X = 0$$ a pour équation caractéristique $r^2 + \lambda = 0$
$$\rightarrow \quad \Delta = -4\lambda$$

♦ 1er cas : $\Delta = 0$ soit $\lambda = 0$

La solution s'écrit : $X(x) = Ax + B$

$X(0) = 0 \rightarrow B = 0$ et $X(L) = 0 \rightarrow A = 0$

Par conséquent, $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre du problème.

♦ 2ème cas : $\Delta > 0$ soit $\lambda < 0$. On pose $\lambda = -\alpha^2$ soit $\Delta = 4\alpha^2 \rightarrow$ $r_1 = \alpha$ et $r_2 = -\alpha$

La solution s'écrit : $X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$

$X(0) = 0 \rightarrow A + B = 0$ soit $A = -B$
$X(L) = 0 \rightarrow A\left(e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}\right) = 2Ash(\alpha a) = 0$

comme $\alpha \neq 0$, $sh(\alpha a) \neq 0$ et donc *A* = 0

Par conséquent, $\lambda < 0$ ne sont pas des valeurs propres.

♦ <u>3ème cas</u> : Δ < 0 soit λ > 0. On pose $\lambda = \beta^2$ soit $\Delta = -4\beta^2 \rightarrow r_1 = j\beta$ et $r_2 = -j\beta$

La solution s'écrit : $X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$

$X(0) = 0 \rightarrow A = 0$
$X(L) = 0 \rightarrow B\sin(\beta L) = 0$ Une solution non triviale de l'équation $(B \neq 0)$ correspond à :

$$\beta = \frac{n\pi}{L} \quad \text{avec} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Par conséquent, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ sont les valeurs propres du problème aux limites.

Les fonctions propres associées aux valeurs propres λ_n s'écrivent :

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

b) <u>Résolution de l'équation différentielle sur la variable *t*</u>

Les valeurs de λ (valeurs propres) étant maintenant connues, on peut résoudre l'équation différentielle en t:

$$\Psi' + \lambda_n k \Psi = 0$$

♦ pour $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, nous obtenons :

$$\Psi_n' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k \Psi_n = 0 \quad \rightarrow \quad \Psi_n(t) = A_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

où A_n est une constante arbitraire.

c) Solution générale de l'EDP:

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles est la superposition de l'ensemble des solutions (on doit considérer toutes les valeurs propres) :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\Psi_n(t)$$

soit :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

d) Solution particulière :

La solution générale doit vérifier la condition initiale :

$$T(x;t=0) = f(x)$$

avec

$$f(x) = \begin{cases} x & pour \quad 0 < x < L/2 \\ L-x & pour \quad L/2 < x < L \end{cases}$$

A partir de la solution générale, nous obtenons :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Il reste donc à décomposer *f(x)* sur la base des fonctions propres en calculant le coefficient A_n :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

En remplaçant *f(x)* par son expression, nous obtenons :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} (L-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Le développement des calculs nous donne :

$$A_n = \frac{4L}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

L'évolution de la température dans la barre suit la loi suivante :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi}{2})e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$