جامعة زيان عاشور بالجلفة — السنة الجامعية **2023-2022**

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير — مقياس رياضيات **1**

قسم الجذع المشترك — مسؤول المقياس: د.شيخاوي عبد العزيز

المحور الثاني: عموميات علي المتتاليات العددية (Basics of Nemurical Sequences)

المحاضرة رقم 03:

1- مفاهيم عامة حول المتتاليات العددية:

تعريف:

المتتالية العددية (u_n) هي تطبيق يرفق بكل عدد طبيعي n العدد الحقيقي (u_n) و الذي يرمز لها بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و يمكن تعريفها بعدة طرق.

1- بواسطة جدول:

n	0	1	2	3	4
(u_n)	1	4	7	10	13

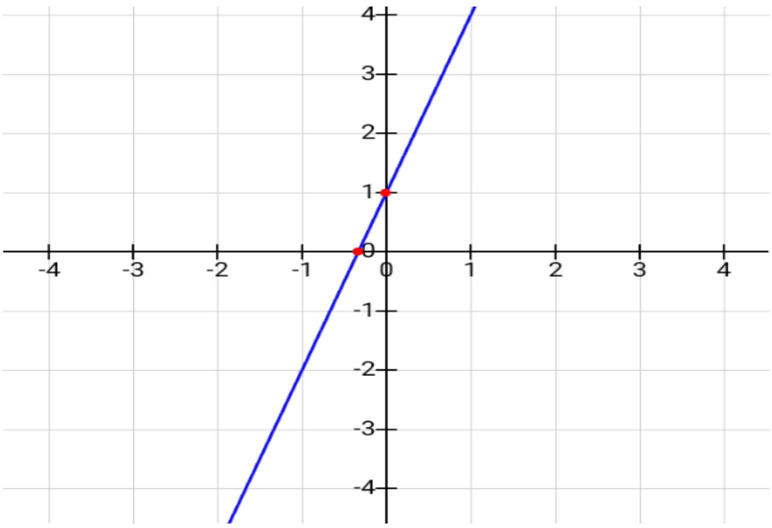
2- بواسطة الحد العام:

$$u_n = 3n+1$$

3- بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

4- بالرسم البياني:



1-1 اتجاه تغير المتتالية العددية:

نقول ان متتالية انها متزايدة اذا كانت $u_{n+1} \geq u_n$ وتكون متزايدة تماما اذا كان $u_{n+1} \succ u_n$.

نقول ان متتالية انها متناقصة اذا كانت $u_{n+1} \leq u_n$ وتكون متناقصة تماما اذا كان $u_{n+1} \prec u_n$.

نقول ان متتالية انها ثابتة اذا كانت $u_{n+1} = u_n$ أي حدودها كلها متساوية $u_0 = u_1 = u_2 = ... = u_n = u_{n+1}$

مثال1:

لتكن لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 6u_n - 5 \end{cases}$$

احسب الحدود u_1, u_2, u_3, u_4

- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- نضع الآن: $u_0 = \alpha$ ماهي قيمة α حتي تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

الحل:

- حساب الحدود: u_1, u_2, u_3, u_4 :

$$\begin{aligned} &u_0 = \frac{1}{2} \\ &u_1 = 6u_0 - 5 = 6\left(\frac{1}{2}\right) - 5 = 3 - 5 = -2 \\ &u_2 = 6u_1 - 5 = 6(-2) - 5 = -12 - 5 = -17 \\ &u_3 = 6u_2 - 5 = 6(-17) - 5 = -102 - 5 = -107 \\ &u_4 = 6u_3 - 5 = 6(-107) - 5 = -642 - 5 = -647 \end{aligned}$$

- تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نلاحظ ان حدود المتتالية (u_n) في تناقص أي: $u_0 \succ u_1 \succ u_2 \succ u_3 \succ u_4$ ومنه المتتالية متناقصة تماما.

- ايجاد قيمة α حتي تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = ...u_n = u_{n+1} \\ u_0 = 6u_0 - 5 \Rightarrow u_0 - 6u_0 = -5 \Rightarrow -5u_0 = -5 \Rightarrow u_0 = 1 \end{cases}$$

مثال2:

لتكن لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

- احسب الحدود u_1, u_2, u_3, u_4
- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- تأكد من صحة التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

الحل:

- حساب الحدود: u_1, u_2, u_3, u_4 :

$$u_0 = \sqrt{0+1} - 0 = 1$$
$$u_1 = \sqrt{1+1} - 1 = \sqrt{2} - 1$$
$$u_2 = \sqrt{2+1} - \sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$
$$u_3 = \sqrt{3+1} - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$
$$u_4 = \sqrt{4+1} - 2 = \sqrt{5} - 2$$

- تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نلاحظ ان حدود المتتالية (u_n) في تناقص أي: $u_0 \succ u_1 \succ u_2 \succ u_3 \succ u_4$ ومنه المتتالية متناقصة تماما.

- تأكد من صحة التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس اشارة المعادلة: $u_{n+1} - u_n = 0$

حتى نتمكن من معرفة اتجاه تغير المتتالية (u_n) يجب استعمال مرافق الجذر:

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}\right) \prec 0$$

اذا المتتالية متناقصة تماما لان: $\sqrt{n} \prec \sqrt{n+2}$ أي $u_{n+1} - u_n \prec 0$.

2-1 المتتالية المحدودة من الاعلى: نقول ان متتالية انها محدودة من الاعلى اذا وُجد عدد حقيقي (a) بحيث: $u_n \leq a$.

المتتالية المحدودة من الاسفل: نقول ان متتالية انها محدودة من الاسفل اذا وُجد عدد حقيقي (b) بحيث: $u_n \geq b$.

المتتالية المحدودة من الاعلى ومن الاسفل: اذا كان: $b \leq u_n \leq a$.

المتتالية المتقاربة: نقول ان متتالية انها متقاربة نحو α اذا وفقط اذا كان: $\forall \varepsilon \succ 0, \exists n_0 \in \aleph, \forall n \geq n_0, |u_n - \alpha| \prec \varepsilon$

ونكتب $\lim_{x \to +\infty}(u_n)=\alpha$

بعض الملاحظات:

- كل متتالية متقاربة فهي محدودة.
- اذا وُجدت نهاية فهي محدودة.
- اذا كانت المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى $(u_n \leq a)$ و متزايدة فهي متقاربة نحو العدد a
- اذا كانت المتتالية (u_n) محدودة من الاسفل $(u_n \geq b)$ و متناقصة فهي متقاربة نحو العدد b
- اذا كانت المتتالية (u_n) ليست متقاربة فهي متباعدة.

مثال3:

لتكن لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة: $u_n=\dfrac{2n^2+3}{n^2+5}$

- احسب الحدود: u_0, u_1, u_2 :
- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- اثبت ان المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد 2

الحل:

حساب الحدود: u_0, u_1, u_2 $u_n=\dfrac{2n^2+3}{n^2+5}$

$$u_0=\frac{2(0)^2+3}{(0)^2+5}=\frac{3}{5}$$
$$u_1=\frac{2(1)^2+3}{(1)^2+5}=\frac{5}{6}$$
$$u_2=\frac{2(2)^2+3}{(2)^2+5}=\frac{11}{9}$$

اتجاه تغير المتتالية (u_n):

ندرس اشارة المعادلة: $u_{n+1}-u_n=0$

$$u_{n+1}=\frac{2(n+1)^2+3}{(n+1)^2+5}=\frac{2n^2+4n+5}{n^2+2n+6}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n^2+4n+5}{n^2+2n+6}-\frac{2n^2+3}{n^2+5}=\frac{(2n^2+4n+5)(n^2+5)-(n^2+2n+6)(2n^2+3)}{(n^2+2n+6)(n^2+5)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n^4+10n^2+4n^3+20n+5n^2+25-2n^4-3n^2-4n^3-6n-12n^2-18}{(n^2+2n+6)(n^2+5)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{14n+7}{(n^2+2n+6)(n^2+5)}\succ 0$$

و منه المتتالية متزايدة تماما.

اثبات ان المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد 2

حساب الفرق

$$u_n-2=\frac{2n^2+3}{n^2+5}-2=\frac{2n^2+3-2n^2-10}{n^2+5}=\frac{-7}{n^2+5}\prec 0$$

$$u_n-2\prec 0\Rightarrow u_n\prec 2$$

و منه المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد 2

مثال4:

لتكن لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة:

$$u_n=\frac{2n+3}{3n+1}$$

- احسب الحدود: u_0,u_1,u_2 :
- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- اثبت ان المتتالية (u_n) محدودة من الاسفل بالعدد $\frac{2}{3}$

الحل:

حساب الحدود: u_0,u_1,u_2

$$u_n=\frac{2n+3}{3n+1}$$

$$u_0=\frac{2(0)+3}{(0)+1}=\frac{3}{1}=3$$

$$u_1=\frac{2(1)+3}{3(1)+1}=\frac{5}{4}$$

$$u_2=\frac{2(2)+3}{3(2)+1}=\frac{7}{7}=1$$

اتجاه تغير المتتالية (u_n)**:**

ندرس اشارة المعادلة:

$$u_{n+1}-u_n=0$$

$$u_{n+1}=\frac{2(n+1)+3}{3(n+1)+1}=\frac{2n+5}{3n+4}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n+5}{3n+4}-\frac{2n+3}{3n+1}=\frac{(2n+5)(3n+1)-(3n+4)(2n+3)}{(3n+4)(3n+1)}=\frac{6n^2+17n+5-6n^2-17n-12}{(3n+4)(3n+1)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-7}{(3n+4)(3n+1)}\prec 0$$

متناقصة تماما.

اثبات ان المتتالية (u_n) محدودة من الاسفل بالعدد $\frac{2}{3}$

$$u_n-\frac{2}{3}=\frac{2n+3}{3n+1}-\frac{2}{3}=\frac{6n+9-6n-2}{3(3n+1)}=\frac{7}{3(3n+1)}\succ 0$$

$$u_n-\frac{2}{3}\succ 0\Rightarrow u_n\succ\frac{2}{3}$$

و منه المتتالية محدودة من الاسفل بالعدد $\frac{2}{3}$

تمارين للحل:

التمرين الاول:

لنعتبر المتتاليات التالية و المعرفة من اجل $n\in\aleph$

$P_n=n+(-1)^n$	$K_n=n.(-1)^n$	$U_n=\frac{n+2}{n+3}$
$L_n=\frac{(-1)^n}{n^3+1}$	$T_n=\frac{1}{n+1}+(-1)^n$	$U_n=\frac{2n+1}{5n+2}$

احسب الحدود الخمسة الاولى ثم ادرس اتجاه تغير وطبيعة المتتالية.

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية التراجعية المعرفة بالعلاقة:

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases}$$

برهن ان $1\leq u_n\leq 2$ من اجل كل عدد طبيعي n

ثم بين انها متقاربة نحو عدد يطلب تعيينه.

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية التراجعية المعرفة بالعلاقة:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6} \end{cases}$$

برهن ان $1 \le u_n \le 3$ من اجل كل عدد طبيعي n

ثم بين انها متقاربة نحو عدد يطلب تعيينه.

التمرين الرابع:

ادرس تقارب المتتالية (u_n) المعرفة:

$$\forall n \in N; u_n = \frac{n \sin(n^n)}{n^2 + 1}$$

حل التمرين الرابع:

لدينا:

$$-1 \le \sin(n^n) \le 1$$

بضرب المعادلة في العدد الموجب $\dfrac{n}{n^2+1}$ نجد:

$$-\frac{n}{n^2+1} \le \sin(n^n) \le \frac{n}{n^2+1}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{n}{n^2+1} == \lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار أي:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{n \sin(n^n)}{n^2+1} \right) = 0$$

المتتالية متقاربة نحو العدد 0 .

2- المتتالية الحسابية:

نقول ان متتالية (u_n) انها حسابية ذات الاساس (r) اذا تحقق:

$$\forall n \in N; u_{n+1} = u_n + r$$

أي:

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \ldots\ldots\ldots u_{n+1} - u_n = r$$

$$u_1-u_0=r\Rightarrow u_1=u_0+r$$
$$u_2-u_1=r\Rightarrow u_2=u_1+r=u_0+2r$$
$$u_3-u_2=r\Rightarrow u_3=u_2+r=u_0+3r$$

نستنتج ان:

$$u_p=u_0+pr.........(1)$$
$$u_n=u_0+nr.........(2)$$

عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الاول u_p هو:

$$u_n=u_0+nr$$

بطرح (1) و (2) نجد:

$$u_n-u_p=(n-p)r\Rightarrow u_n=u_p+(n-p).r$$

$$u_n=u_p+(n-p).r$$

1-2 مجموع الحدود المتتالية الحسابية:

عددالحدود/2 (الحد الاول + الحد الاخير)

حيث عدد الحدود يمثل دليل الحد الاخير− الحد الاول +1

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+u_2+.......u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$$

علاقة ثلاثة حدود متعاقبة (x,y,z) لمتتالية حسابية:

تكون متتالية حسابية اذا كان:

$$y-x=z-y=r$$

$$\begin{cases} y-x=r\Rightarrow x=y-r \\ z-y=r\Rightarrow z=y+r \end{cases}\Rightarrow 2y=x+z$$

مثال1:

I− لتكن لدينا المتتالية (u_n) المعرفة: $u_n=\frac{2}{5}-3n$

- بين ان (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول u_0 ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية.
- احسب المجموع S_n حيث: $s_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}u_k=u_0+u_1+u_2+.......u_{n-1}$
- بين ان العدد $-\frac{148}{5}$ هو حدا لهذه المتتالية ثم اوجد رتبته.

II- نضع المتتالية (v_n) المعرفة بحدها الاول v_0 و بالعلاقة $v_n = e^{u_n}$

- بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول v_0
- احسب المجموع P_n : $P_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots v_{n-1}$
- احسب الجداء L_n : $L_n = \prod_{k=0}^{k=n-1} v_k = v_0.v_1.v_2 \dots\dots\dots v_{n-1}$

مثال2:

لتكن لدينا المتتالية (u_n) المعرفة:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in N, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 1 \end{cases}$$

احسب الحدود: u_2, u_3, u_4, u_5

- احسب عبارة u_n بدلالة n ثم عبارة $u_{n+1} - u_n$ بدلالة n.
- ادرس طبيعة المتتالية (u_n).

مثال3:

لتكن لدينا المتتالية (u_n) المعرفة:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in N, u_{n+1} = \frac{4 - 2u_n}{5} \end{cases}$$

- اذا كانت (u_n) متقاربة فأوجد نهايتها.

نضع المتتالية (v_n) المعرفة بحدها الاول v_0 و بالعلاقة التراجعية التالية: $v_n = u_n - \frac{4}{7}$

- اوجد عبارة (v_n) بدلالة n ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n
- ثم ادرس رتابة و طبيعة المتتالية (u_n).

حل التمرين الثاني:

احسب الحدود: u_2, u_3, u_4, u_5 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in N, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 1 \Rightarrow u_2 = 2u_1 - u_0 - 1 = 2 - 0 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

$$u_3 = 2u_2 - u_1 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

$$u_4 = 2u_3 - u_2 - 1 = 0 - 1 - 1 = -2$$

$u_5 = 2u_4 - u_3 - 1 = -4 - 0 - 1 = -5$

نضع $v_n = u_{n+1} - u_n \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in N, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 1 \Rightarrow u_{n+2} = u_{n+1} + u_{n+1} - u_n - 1 \Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n - 1 \end{cases}$

$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n - 1$

نلاحظ ان (v_n) عبارة عن متتالية حسابية اساسها $r = -1$ و حدها الاول $v_0 = 1$ $\quad v_{n+1} = v_n - 1$

عبارة (v_n) بدلالة n هي: $v_n = v_0 + nr = 1 - n$

$v_n = u_{n+1} - u_n \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

عبارة $u_{n+1} - u_n$ بدلالة n : $v_n = u_{n+1} - u_n = 1 - n$

دراسة طبيعة المتتالية (u_n) يجب ايجاد عبارة (u_n) بدلالة n

بالجمع نجد:

$$\begin{aligned}
&v_n = u_{n+1} - u_n = 1 - n \\
&v_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 \\
&v_1 = u_2 - u_1 = 1 - 1 \\
&v_2 = u_3 - u_2 = 1 - 2 \\
&v_3 = u_4 - u_2 = 1 - 3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&v_n = u_{n+1} - u_n = 1 - n
\end{aligned}$$

$S_n = -u_0 - u_{n+1} = n + 1 - (0 + 1 + 2 + 3 + ... + n)$

$$-u_0 - u_{n+1} = n + 1 - \frac{n+1}{2}(n) \Rightarrow u_n = u_0 + n - \frac{n}{2}(n-1) = n\left(1 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) = n\left(-\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\right)$$

$$u_n = n\left(-\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(-\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\right) = -\infty$$

المتتالية (u_n) متباعدة.

2-2 المتتالية الهندسية:

نقول ان متتالية (u_n) انها هندسية ذات الاساس (q) ادا تحقق: $\forall n \in N; u_{n+1} = q.u_n$

أي: $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{u_{n+1}}{u_n} = r$

$$\frac{u_1}{u_0} = q \Rightarrow u_1 = u_0 q$$
$$\frac{u_2}{u_1} = q \Rightarrow u_2 = u_1 q = u_0 q^2$$
$$\frac{u_3}{u_2} = q \Rightarrow u_3 = u_2 q = u_0 q^3$$

نستنتج ان:

$$u_p = u_0.q^p \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$u_n = u_0.q^n \ldots\ldots\ldots(2)$$

عبارة الحد العام لمتتالية الهندسية حدها الاول u_p هو: $u_n = u_0 + nr$

بقسمة(1)على(2) نجد:

$$\frac{u_n}{u_p} = q \Rightarrow u_n = u_p.q^{n-p}$$

1-2-2 مجموع الحدود المتتالية الهندسية:

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots. u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

علاقة ثلاثة حدود متعاقبة (x, y, z) لمتتالية هندسية:

تكون متتالية حسابية اذا كان: $\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = q$

$$\frac{y}{x} = q \Rightarrow x = \frac{y}{q}$$
$$\frac{z}{y} = q \Rightarrow z = y.q$$

مثال1:

لتكن لدينا المتتالية (u_n) المعرفة: $u_n = \frac{2}{5}.e^{1-n}$

- بين ان (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول u_0 .
- احسب المجموع S_n حيث: $s_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + ...u_{n-1}$
- بين ان العدد $\frac{2}{5.e^{100}}$ هو حدا لهذه المتتالية ثم اوجد رتبته.

نضع المتتالية (v_n) المعرفة بحدها الاول v_0 و بالعلاقة $v_n = \ln u_n$

- بين ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول v_0
- احسب المجموع P_n : $P_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + ...v_{n-1}$

احسب الجداء L_n : $L_n = \prod_{k=0}^{k=n-1} v_k = v_0.v_1.v_2........v_{n-1}$

مثال2:

- لتكن لدينا المتتالية (u_n) المعرفة:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in N, u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} \end{cases}$$

- احسب الحدود: u_1, u_2, u_3, u_4
- اذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فأوجد نهايتها.
- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- بين ان: $\forall n \in N, |u_{n+1} - 4| \prec \frac{|u_n - 4|}{4}$

مثال3:

- لتكن لدينا المتتالية (u_n) المعرفة:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in N, u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} \end{cases}$$

- احسب الحدود الاربعة الاولى.
- بين ان المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد $(\sqrt{3})$.
- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- نضع (u_n) متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية: $\forall n \in \aleph, v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

- بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب اساسها وحدها الاول v_0 .
- اوجد عبارة (v_n) و (u_n) بدلالة n
- احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

مثال4:

- ليكن لدينا العدد الطبيعي $n \in N$ نضع I_n : $I_n = \int_{n\pi}^{(n+\pi)} e^{-x}.\sin x dx$
- باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين احسب I_n بدلالة n
- بين ان I_n متتالية هندسية يطلب اساسها وحدها الاول I_0 .
- بين ان المتتالية (u_n) متقاربة ثم أوجد نهايتها.
- نضع (S_n) حيث: $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n, n \in N$

احسب عبارة (S_n) بدلالة n ثم $\lim_{n \to +\infty} S_n$

مثال5:

- باستعمال التكامل بالتجزئة احسب I : $I = \int_0^1 (x-2)e^x dx$

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع : $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} (k-2n) e^{\frac{k}{n}}$

- احسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$
- اوجد قيم n حتى يكون: $|S_n - 1| \leq 10^2$