حل التمرين رقم 01:

- حساب الحدود: u_1,u_2,u_3,u_4 :

$$u_0=\frac{1}{2}$$
$$u_1=6u_0-5=6\left(\frac{1}{2}\right)-5=3-5=-2$$
$$u_2=6u_1-5=6(-2)-5=-12-5=-17$$
$$u_3=6u_2-5=6(-17)-5=-102-5=-107$$
$$u_4=6u_3-5=6(-107)-5=-642-5=-647$$

- تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نلاحظ ان حدود المتتالية (u_n) في تناقص أي: $u_0\succ u_1\succ u_2\succ u_3\succ u_4$ ومنه المتتالية متناقصة تماما.

- ايجاد قيمة α حتي تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

$$\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_0=u_1=u_2=u_3=.......u_n=u_{n+1} \\ u_0=6u_0-5\Rightarrow u_0-6u_0=-5\Rightarrow -5u_0=-5\Rightarrow u_0=1 \end{cases}$$

حل التمرين رقم 02:

- حساب الحدود: u_1,u_2,u_3,u_4 :

$$u_0=\sqrt{0+1}-0=1$$
$$u_1=\sqrt{1+1}-1=\sqrt{2}-1$$
$$u_2=\sqrt{2+1}-\sqrt{2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$u_3=\sqrt{3+1}-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$$
$$u_4=\sqrt{4+1}-2=\sqrt{5}-2$$

- تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نلاحظ ان حدود المتتالية (u_n) في تناقص أي: $u_0\succ u_1\succ u_2\succ u_3\succ u_4$ ومنه المتتالية متناقصة تماما.

- تأكد من صحة التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس اشارة المعادلة: $u_{n+1}-u_n=0$

حتى نتمكن من معرفة اتجاه تغير المتتالية (u_n) يجب استعمال مرافق الجذر:

$$u_n=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\prec 0$$

اذا المتتالية متناقصة تماما لان: $\sqrt{n}\prec\sqrt{n+2}$ أي $u_{n+1}-u_n\prec 0$.

حل التمرين رقم 03:

- ايجاد قيمة α حتي تكون المتتالية ثابتة: تكون المتتالية ثابتة اذا كانت حدودها كلها متساوية أي:

$u_0 = u_1 = u_2 = ... = u_n = u_{n+1} = \alpha$ ومنه : $u_0 = 3u_0 - 4 \Rightarrow \alpha - 3\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = 2$.

- حساب الحدود لما $u_0 = 5$.

$$u_1 = 3u_0 - 4 \Rightarrow u_1 = 11$$
$$u_2 = 3u_1 - 4 \Rightarrow u_2 = 3.11 - 4 = 29$$
$$u_3 = 3u_2 - 4 \Rightarrow u_3 = 3.29 - 4 = 83$$
$$u_4 = 3u_3 - 4 \Rightarrow u_4 = 3.83 - 4 = 245$$

- تخمين حول اتجاه تغير المتتالية:

نلاحظ ان حدود المتتالية في تزايد $u_0 \prec u_1 \prec u_2 \prec u_3 \prec u_4$ ومنه المتتالية متزايدة تماما.

حل التمرين رقم 04:

- حساب الحدود u_1, u_2, u_3, u_4

$$u_1 = -2u_0 + 3 \Rightarrow u_1 = -3$$
$$u_2 = -2u_1 + 3 \Rightarrow u_2 = -2.(-3) + 3 = 9$$
$$u_3 = -2u_2 + 3 \Rightarrow u_3 = -2(9) + 3 = -15$$
$$u_4 = -2u_3 + 3 \Rightarrow u_4 = -2.(-15) + 3 = 33$$

- تخمين حول اتجاه تغير المتتالية: ان المتتالية ليست رتيبة.

حل التمرين رقم 05:

- حساب الحدود u_1, u_2, u_3, u_4

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{n+2} \Rightarrow u_1 = 1 + 1 = 2$$
$$u_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2+2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$
$$u_3 = \frac{1}{3} + \frac{3}{3+2} = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{14}{15}$$
$$u_4 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4+2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

- دراسة رتابة المتتالية:

ندرس اتجاه تغير المتتالية

دراسة اشارة الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=0\Rightarrow\frac{1}{n+1}+\frac{3}{n+3}-\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n+2}\right)=\frac{4n+6}{(n+1)(n+3)}-\frac{4n+2}{n(n+2)}$$
$$\frac{(4n+6)(n^2+2n)-(4n+2)(n^2+4n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{4n^3+14n^2+12n-(4n^3+18n^2+20n+6)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$u_{n+1}-u_n=\frac{-4n^2-8n-6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{-2(2n^2+4n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\prec 0$$

ومنه المتتالية متناقصة تماما.

حل التمرين رقم 06:

- حساب الحدود u_1,u_2,u_3,u_4

$$u_n=\frac{n+1}{n}-\frac{3}{n+2}\Rightarrow u_1=2-3=-1$$
$$u_2=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$
$$u_3=\frac{4}{3}-\frac{3}{5}=\frac{11}{15}$$
$$u_4=\frac{5}{4}-\frac{3}{4+2}=\frac{5}{4}-\frac{3}{6}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

- دراسة رتابة المتتالية:

ندرس اتجاه تغير المتتالية

دراسة اشارة الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=0\Rightarrow\frac{n+2}{n+1}-\frac{3}{n+3}-\left(\frac{n+1}{n}-\frac{3}{n+2}\right)=\frac{n^2+2n+3}{(n+1)(n+3)}-\frac{n^2+2}{n(n+2)}$$
$$\frac{(n^2+2n+3)(n^2+2n)-(n^2+2)(n^2+4n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n^4+4n^3+7n^2+6n-n^4-4n^3-5n^2-8n-6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n^2-2n-6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=0\Rightarrow 2n^2-2n-6=0$$

ومنه المتتالية متناقصة تماما علي المجال $]0.2]$ و متزايدة تماما علي المجال $[2.+00[$.

حل التمرين رقم 07:

- حساب الحدود: u_1,u_2,u_3,u_4 :

$$u_0=\sqrt{0+1}-\sqrt{0+2}=1-\sqrt{2}=-0.41$$
$$u_1=\sqrt{1+1}-\sqrt{1+2}=\sqrt{2}-\sqrt{3}=-0.31$$
$$u_2=\sqrt{2+1}-\sqrt{4}=\sqrt{3}-2=-0.26$$
$$u_3=\sqrt{3+1}-\sqrt{5}=2-\sqrt{5}=-0.23$$
$$u_4=\sqrt{4+1}-\sqrt{6}=\sqrt{5}-\sqrt{6}=-0.21$$

- تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نلاحظ ان حدود المتتالية (u_n) في تزايد أي: $u_0\prec u_1\prec u_2\prec u_3\prec u_4$ ومنه المتتالية متزايدة تماما.

- تأكد من صحة التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس اشارة المعادلة: $u_{n+1}-u_n=0$

حتى نتمكن من معرفة اتجاه تغير المتتالية (u_n) يجب استعمال مرافق الجذر:

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}$$

$$\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}=\frac{n+1-n-2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+2}=\frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$

$$u_{n+1}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}=\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=\frac{-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}=\frac{-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\succ 0$$

اذا المتتالية متزايدة تماما لان: $\sqrt{n+3}\succ\sqrt{n+1}$ أي $u_{n+1}-u_n\succ 0$.

حل التمرين رقم 08:

حساب الحدود: u_0,u_1,u_2

$$u_n=\frac{2n^2+3}{n^2+5}$$

$$u_0=\frac{2(0)^2+3}{(0)^2+5}=\frac{3}{5}$$

$$u_1=\frac{2(1)^2+3}{(1)^2+5}=\frac{5}{6}$$

$$u_2=\frac{2(2)^2+3}{(2)^2+5}=\frac{11}{9}$$

اتجاه تغير المتتالية (u_n):

ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n=0$

$$u_{n+1}=\frac{2(n+1)^2+3}{(n+1)^2+5}=\frac{2n^2+4n+5}{n^2+2n+6}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n^2+4n+5}{n^2+2n+6}-\frac{2n^2+3}{n^2+5}=\frac{\left(2n^2+4n+5\right)\left(n^2+5\right)-\left(n^2+2n+6\right)\left(2n^2+3\right)}{\left(n^2+2n+6\right)\left(n^2+5\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n^4+10n^2+4n^3+20n+5n^2+25-2n^4-3n^2-4n^3-6n-12n^2-18}{\left(n^2+2n+6\right)\left(n^2+5\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{14n+7}{\left(n^2+2n+6\right)\left(n^2+5\right)}\succ 0$$

و منه المتتالية متزايدة تماما.

اثبات ان المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد 2

حساب الفرق

$$u_n-2=\frac{2n^2+3}{n^2+5}-2=\frac{2n^2+3-2n^2-10}{n^2+5}=\frac{-7}{n^2+5}\prec 0$$

$$u_n-2\prec 0\Rightarrow u_n\prec 2$$

و منه المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد 2

حل التمرين رقم 09:

حساب الحدود: u_0,u_1,u_2

$$u_n=\frac{2n+3}{3n+1}$$

$$u_0=\frac{2(0)+3}{(0)+1}=\frac{3}{1}=3$$

$$u_1=\frac{2(1)+3}{3(1)+1}=\frac{5}{4}$$

$$u_2=\frac{2(2)+3}{3(2)+1}=\frac{7}{7}=1$$

اتجاه تغير المتتالية (u_n)**:**

ندرس اشارة المعادلة:

$$u_{n+1}-u_n=0$$

$$u_{n+1}=\frac{2(n+1)+3}{3(n+1)+1}=\frac{2n+5}{3n+4}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n+5}{3n+4}-\frac{2n+3}{3n+1}=\frac{(2n+5)(3n+1)-(3n+4)(2n+3)}{(3n+4)(3n+1)}=\frac{6n^2+17n+5-6n^2-17n-12}{(3n+4)(3n+1)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-7}{(3n+4)(3n+1)}\prec 0$$

متناقصة تماما.

اثبات ان المتتالية (u_n) محدودة من الاسفل بالعدد $\frac{2}{3}$

$$u_n-\frac{2}{3}=\frac{2n+3}{3n+1}-\frac{2}{3}=\frac{6n+9-6n-2}{3(3n+1)}=\frac{7}{3(3n+1)}\succ 0$$

$$u_n-\frac{2}{3}\succ 0\Rightarrow u_n\succ\frac{2}{3}$$

و منه المتتالية محدودة من الاسفل بالعدد $\frac{2}{3}$

حل التمرين رقم 10:

حساب الحدود: u_0,u_1,u_2

$$u_n=\frac{2n+3}{3n+1}$$

$$u_n=\frac{2n+3}{3n+1}\Rightarrow u_0=\frac{3}{1}=3$$
$$u_1=\frac{2+3}{3+1}\Rightarrow u_1=\frac{5}{4}$$
$$u_2=\frac{4+3}{6+1}\Rightarrow u_2=\frac{7}{7}=1$$
$$u_3=\frac{6+3}{9+1}\Rightarrow u_3=\frac{9}{10}$$

اتجاه تغير المتتالية (u_n):

ندرس اشارة الفرق :

$$u_{n+1}-u_n=0$$
$$u_{n+1}=\frac{2(n+1)+3}{3(n+1)+1}=\frac{2n+5}{3n+4}$$
$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n+5}{3n+4}-\frac{2n+3}{3n+1}=\frac{6n^2+17n+5-6n^2-17n-12}{(3n+4)(3n+1)}$$
$$=\frac{-7}{(3n+4)(3n+1)}\prec 0$$

و منه المتتالية متناقصة تماما.

اثبات ان المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد $\frac{2}{3}$

حساب الفرق

$$u_n-\frac{2}{3}=\frac{2n+3}{3n+1}-\frac{2}{3}=\frac{6n+9-6n-2}{3(3n+1)}=\frac{7}{3(3n+1)}\succ 0$$
$$u_n-\frac{2}{3}\succ 0\Rightarrow u_n\succ\frac{2}{3}$$

و منه المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد $\frac{2}{3}$.

حل التمرين رقم 11:

حساب الحدود: u_0,u_1,u_2

$$u_n=\frac{n+2}{5n+1}$$
$$u_n=\frac{n+2}{5n+1}\Rightarrow u_0=\frac{2}{1}=2$$
$$u_1=\frac{1+2}{5+1}\Rightarrow u_1=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
$$u_2=\frac{2+2}{10+1}\Rightarrow u_2=\frac{4}{11}$$
$$u_3=\frac{3+2}{15+1}\Rightarrow u_3=\frac{5}{16}$$

اتجاه تغير المتتالية (u_n):

ندرس اشارة الفرق :

$$u_{n+1}-u_n=0$$

$$u_{n+1}=\frac{(n+1)+2}{5(n+1)+1}=\frac{n+3}{5n+6}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+3}{5n+6}-\frac{n+2}{5n+1}=\frac{5n^2+16n+3-5n^2-16n-12}{(5n+6)(5n+1)}=\frac{-9}{(5n+6)(5n+1)}\prec 0$$

و منه المتتالية متناقصة تماما.

اثبات ان المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد $\frac{1}{5}$

حساب الفرق

$$u_n-\frac{1}{5}=\frac{n+2}{5n+1}-\frac{1}{5}=\frac{5n+10-5n-1}{5(5n+1)}=\frac{9}{5(5n+1)}\succ 0$$

$$u_n-\frac{1}{5}\succ 0\Rightarrow u_n\succ\frac{1}{5}$$

و منه المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد $\frac{1}{5}$.

حل التمرين رقم 12:

حساب الحدود: u_0,u_1,u_2

$$u_n=\frac{5n+2}{3n+1}$$

$$u_n=\frac{5n+2}{3n+1}\Rightarrow u_0=\frac{2}{1}=2$$

$$u_1=\frac{5+2}{3+1}\Rightarrow u_1=\frac{7}{4}$$

$$u_2=\frac{10+2}{6+1}\Rightarrow u_2=\frac{12}{7}$$

$$u_3=\frac{15+2}{9+1}\Rightarrow u_3=\frac{17}{10}$$

اتجاه تغير المتتالية (u_n):

ندرس اشارة الفرق :

$$u_{n+1}-u_n=0$$

$$u_{n+1}=\frac{5(n+1)+2}{3(n+1)+1}=\frac{5n+7}{3n+4}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5n+7}{3n+4}-\frac{5n+2}{3n+1}=\frac{15n^2+26n+7-15n^2-26n-8}{(3n+4)(3n+1)}$$

$$=\frac{-1}{(3n+4)(3n+1)}\prec 0$$

و منه المتتالية متناقصة تماما.

اثبات ان المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد $\frac{5}{3}$

حساب الفرق

$$u_n - \frac{5}{3} = \frac{5n+2}{3n+1} - \frac{5}{3} = \frac{15n+6-15n-5}{3(3n+1)} = \frac{1}{3(3n+1)} \succ 0$$

$$u_n - \frac{5}{3} \succ 0 \Rightarrow u_n \succ \frac{5}{3}$$

و منه المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد $\frac{5}{3}$.